

# Richiami sulla serie di Fourier

## 1 Serie di Fourier

In molti casi di interesse pratico occorre studiare fenomeni vibratorii periodici di tipo generale (non puramente armonici); un esempio di funzione periodica generica è rappresentato in Figura 1.

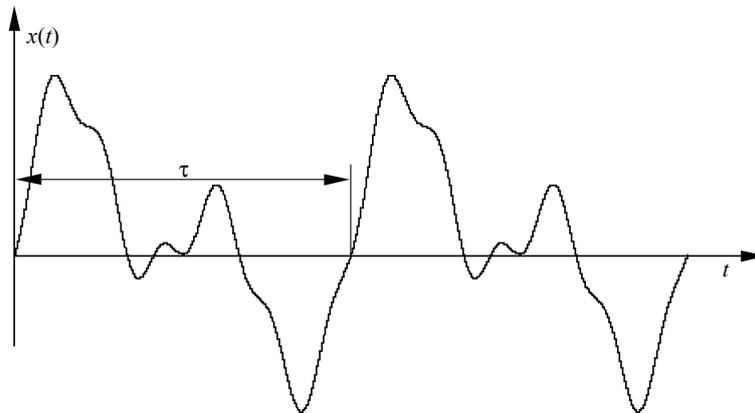


Figura 1: Esempio di funzione periodica non armonica.

Come è noto, qualsiasi funzione periodica può essere sviluppata in serie di Fourier, mediante una somma infinita di termini sinusoidali e cosinusoidali; effettuare l'analisi armonica di un segnale periodico, significa appunto determinare le componenti armoniche del segnale ed il loro contributo (in termini di ampiezza e fase) all'interno del segnale stesso.

Tramite l'analisi armonica è possibile diagnosticare le anomalie di funzionamento di una macchina o verificare se, in una particolare causa eccitatrice, sono presenti componenti armoniche con frequenze tali da generare condizioni di risonanza pericolose per un dato sistema. Tale tecnica riveste quindi un'importanza fondamentale nello studio sperimentale delle vibrazioni.

In tempi recenti sono stati sviluppati efficienti algoritmi di calcolo<sup>1</sup> che permettono di eseguire in modo efficiente l'analisi armonica su un segnale rilevato per via sperimentale; i prodotti hardware e software attualmente disponibili sul mercato utilizzano tali algoritmi per effettuare l'analisi dei segnali con grande rapidità (spesso addirittura in tempo reale, ovvero durante l'acquisizione dei dati).

### 1.1 Serie di Fourier in forma trigonometrica

Se  $x(t)$  è una funzione periodica con periodo  $T$  la sua rappresentazione in serie di Fourier è data da:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \end{aligned} \quad (1)$$

dove  $\omega$  è la frequenza fondamentale e  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$  sono coefficienti costanti. Per determinare i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  si moltiplicano ambo i membri della (1) per  $\cos n\omega t$  e per  $\sin n\omega t$  rispettivamente e si integra su un periodo  $T = 2\pi/\omega$  (per esempio da 0 a  $2\pi/\omega$ ).

<sup>1</sup>Il più noto di tali algoritmi è la FFT (Fast Fourier Transform o Trasformata veloce di Fourier).

Utilizzando poi le seguenti relazioni

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos n\omega t \cos m\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi/\omega & \text{se } m = n \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin n\omega t \sin m\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi/\omega & \text{se } m = n \end{cases} \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos n\omega t \sin m\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 0 & \text{se } m = n \end{cases} \quad (4)$$

si osserva che tutti i termini al secondo membro dell'equazione risultano nulli eccetto uno; pertanto:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega t dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega t dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Attraverso lo sviluppo in serie di Fourier è quindi possibile rappresentare qualsiasi funzione periodica mediante una somma di funzioni armoniche; sebbene la serie sia infinita, nei casi pratici è possibile ottenere una buona approssimazione sommando solo un numero limitato di termini (ovviamente tale numero dipende dal grado di approssimazione che si vuole ottenere).

Introducendo opportuni sfasamenti, la serie di Fourier può anche essere rappresentata come serie di soli termini sinusoidali o cosinusoidali; infatti, considerando la (1) e ponendo  $a_0/2 = d_0$ ,  $a_n = d_n \cos \varphi_n$ ,  $b_n = d_n \sin \varphi_n$ , si ha:

$$\begin{aligned} x(t) &= d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (\cos n\omega t \cos \varphi_n + \sin n\omega t \sin \varphi_n) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \\ &= d_0 + d_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + d_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

dove:

$$d_0 = \frac{a_0}{2} \quad d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (8)$$

Per ottenere una serie di soli seni si procede in modo analogo.

## 1.2 Serie di Fourier in forma complessa

Ricaviamo ora l'espressione della serie di Fourier in forma complessa; utilizzando la nota formula di Eulero e ponendo in essa  $\varphi = \pm n\omega t$  si ha:

$$\begin{aligned} e^{in\omega t} &= \cos n\omega t + i \sin n\omega t \\ e^{-in\omega t} &= \cos n\omega t - i \sin n\omega t \end{aligned} \quad (9)$$

Sommando e sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\cos n\omega t = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \quad \sin n\omega t = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \quad (10)$$

Sostituendo nella (1) le espressioni (10) si ricava per  $x(t)$  l'espressione seguente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \left( \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \right) + b_n \left( \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} e^{i0\omega t} (a_0 - ib_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} e^{in\omega t} (a_n - ib_n) + \frac{1}{2} e^{-in\omega t} (a_n + ib_n) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

in cui  $b_0 = 0$ . Definendo ora i seguenti coefficienti complessi di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \quad (12)$$

si ha:

$$x(t) = c_0 e^{i0\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (13)$$

I coefficienti  $c_n$  della serie possono essere facilmente calcolati utilizzando le espressioni di  $a_n$  e  $b_n$  fornite dalle relazioni (5) e (6):

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} \int_0^T x(t) [\cos n\omega t - i \sin n\omega t] dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-in\omega t} dt \quad (14)$$

### 1.3 Spettro di Fourier

Le funzioni  $a_n \cos n\omega t$  e  $b_n \sin n\omega t$  sono chiamate *armoniche di ordine n* della funzione periodica  $x(t)$  ed il loro periodo è pari a  $T/n$ . Le armoniche vengono solitamente rappresentate in forma grafica in funzione della frequenza  $n\omega$  mediante linee verticali aventi lunghezza proporzionale al valore numerico dell'ampiezza o della fase; i diagrammi ottenuti prendono il nome di *spettri di Fourier* o *spettri di frequenza*.

Se si utilizza l'espressione della serie fornita dalla (7) si avranno gli spettri di Figura 2, relativi all'ampiezza  $d_n$  ed alla fase  $\varphi_n$  di ciascuna componente; in modo analogo si possono costruire gli spettri relativi alle ampiezze  $a_n$  e  $b_n$  dei termini in coseno ed in seno (presenti nell'equazione (1)).

Si osservi che lo spettro ottenuto è di tipo discreto<sup>2</sup> (spettro a righe), poiché l'ordine  $n$  dell'armonica può variare solo nell'insieme dei numeri naturali; la riga verticale in corrispondenza della frequenza nulla ( $n = 0$ ) corrisponde all'ampiezza della componente continua (o costante) della funzione periodica in esame.

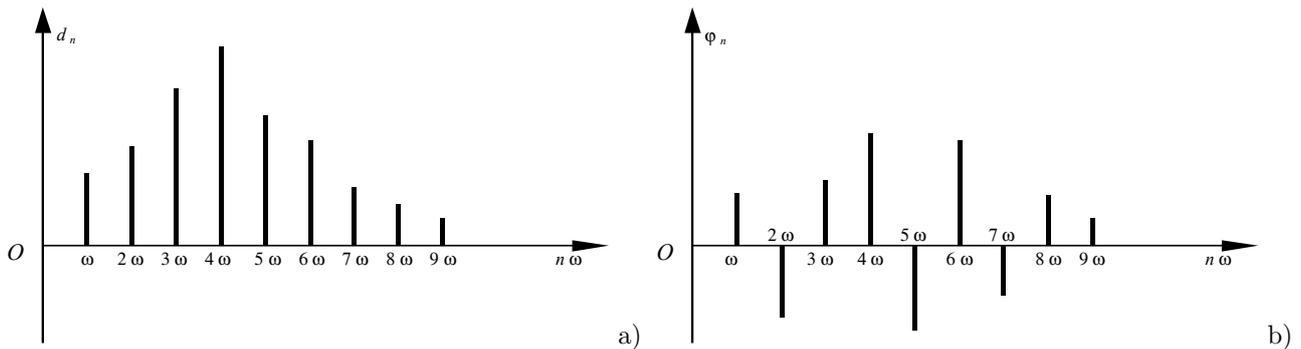


Figura 2: Spettri di Fourier di una funzione periodica: a) modulo; b) fase.

### 1.4 Serie di Fourier per funzioni pari e dispari

Una funzione *pari* soddisfa la relazione  $x(-t) = x(t)$ , ovvero presenta una simmetria rispetto all'asse delle ordinate; in questo caso lo sviluppo in serie di Fourier contiene soltanto termini in *coseno* (essendo il coseno una funzione pari); per una funzione pari si ha quindi:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \quad b_n = 0 \quad \forall n \quad (15)$$

Una funzione *dispari* soddisfa la relazione  $x(-t) = -x(t)$ , ovvero presenta una simmetria rispetto all'origine degli assi coordinati; in questo caso lo sviluppo in serie di Fourier contiene soltanto termini in *seno* (essendo il seno una funzione dispari); per una funzione dispari possiamo allora scrivere:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad a_n = 0 \quad \forall n \quad (16)$$

<sup>2</sup>Se si vuole rappresentare nel dominio delle frequenze una funzione non periodica occorre utilizzare l'integrale di Fourier, anziché la serie: in questo caso lo spettro di frequenza diviene uno spettro continuo, che può essere pensato come il limite a cui tende lo spettro discreto quando l'intervallo fra due frequenze consecutive diviene infinitesimo.

È possibile dimostrare in modo molto semplice queste affermazioni (che peraltro risultano già intuitivamente comprensibili) se si tiene presente che i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  si ottengono integrando sul periodo il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari: tale prodotto genera in entrambi i casi una funzione dispari, il cui integrale sul periodo risulta sempre nullo.

Infatti, se  $x(t) = P(t)$  è una funzione pari, si ha:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \underbrace{P(t)}_{\text{pari}} \underbrace{\sin n\omega t}_{\text{dispari}} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{P(t) \sin n\omega t}_{\text{dispari}} dt = 0 \quad (17)$$

Viceversa, se  $x(t) = D(t)$  è una funzione dispari, si ottiene:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \underbrace{D(t)}_{\text{dispari}} \underbrace{\cos n\omega t}_{\text{pari}} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{D(t) \cos n\omega t}_{\text{dispari}} dt = 0 \quad (18)$$

## 1.5 Fenomeno di Gibbs

Quando una funzione è rappresentata tramite una serie di Fourier è possibile osservare in alcuni casi un comportamento anomalo, noto come fenomeno di Gibbs (dal nome del suo scopritore); ad esempio, in Figura 3 è rappresentata un'onda triangolare periodica (dente di sega) insieme con alcune sue approssimazioni ricavate dallo sviluppo in serie di Fourier: ciascuna approssimazione è stata ricavata utilizzando un numero differente di termini.

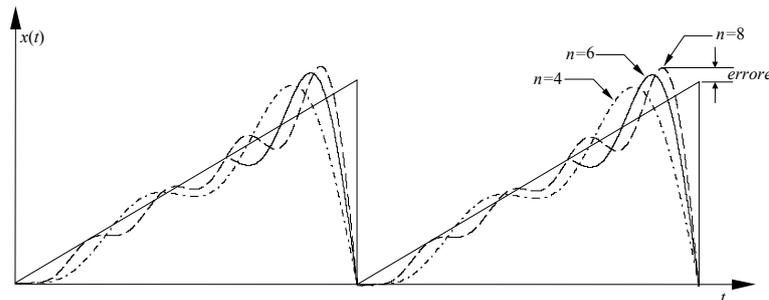


Figura 3: Ad illustrazione del fenomeno di Gibbs.

Al crescere del numero di termini  $n$  della serie l'approssimazione si fa sempre migliore in tutti i punti eccetto che nelle vicinanze di una discontinuità: qui lo scostamento dalla forma dell'onda reale diviene più stretto ma non più piccolo in ampiezza. È stato osservato che l'errore in ampiezza risulta approssimativamente pari al 9% quando  $n \rightarrow \infty$ .