

Modelli a parametri concentrati per lo studio delle vibrazioni torsionali

1 Introduzione

In questo capitolo verranno presentati alcuni modelli di calcolo per lo studio delle vibrazioni torsionali di alberi con masse calettate. Tali modelli risultano molto utili per lo studio delle vibrazioni di trasmissioni meccaniche. La schematizzazione che viene qui adottata è quella classica a parametri concentrati, in cui gli alberi si considerano deformabili a torsione, ma privi di massa; pertanto le proprietà inerziali del sistema sono attribuite esclusivamente alle masse rotanti calettate sugli alberi.

Utilizzando tali schemi, si semplifica la trattazione analitica del problema, evitando di ricorrere alla teoria dei sistemi con massa distribuita (continui) deformabili a torsione o tecniche agli elementi finiti. I risultati che si ottengono dai modelli a parametri concentrati spesso presentano un buon grado di approssimazione, se confrontati con quelli derivanti dall'impiego di schematizzazioni più sofisticate. In molti casi pratici, quindi, conviene effettuare lo studio delle vibrazioni torsionali utilizzando questo tipo di approccio, per il quale non sono richieste tecniche di calcolo particolarmente complesse.

Tutti i sistemi che verranno analizzati in questo capitolo sono *semidefiniti* e pertanto una delle loro frequenze proprie risulterà nulla; la forma modale associata a tale frequenza corrisponde, come è noto ad un moto rigido, ovvero ad un movimento in cui non si ha deformazione torsionale dei tratti di albero che costituiscono il sistema vibrante.

2 Albero con due masse

Per iniziare lo studio delle vibrazioni torsionali consideriamo il sistema rappresentato in Figura 1, costituito da due dischi aventi momento d'inerzia pari a J_1 e J_2 , calettati alle estremità di un albero deformabile a torsione, di diametro d e realizzato con materiale avente modulo di elasticità tangenziale pari a G . La rigidità torsionale

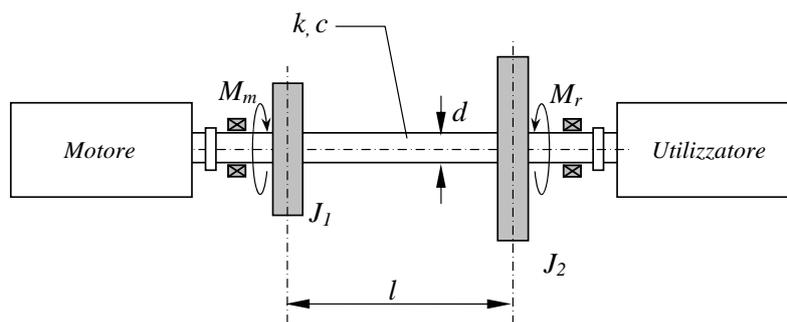


Figura 1: Sistema costituito da due dischi collegati da un albero deformabile a torsione.

k dell'albero si calcola mediante la nota relazione:

$$k = \frac{GI_p}{l} \quad (1)$$

in cui $I_p = \pi d^4/32$ indica il momento d'inerzia polare della sezione trasversale dell'albero.

Per tenere conto degli effetti dissipativi (legati all'attrito dei cuscinetti, all'effetto ventilante e allo smorzamento strutturale del materiale costituente l'albero) si introduce la costante di smorzamento c , che deve essere

assegnata in modo tale da generare una dissipazione energetica pari a quella equivalente a quella effettivamente presente nel sistema reale; il modello di smorzamento considerato è sempre quello di tipo viscoso, in cui il momento smorzante risulta proporzionale alla differenza delle velocità angolari delle due masse calettate all'estremità dell'albero.

2.1 Scrittura delle equazioni di moto

La scrittura delle equazioni di moto può essere effettuata, come di consueto, mediante il metodo degli equilibri dinamici oppure mediante le equazioni di Lagrange. Se si utilizzano gli equilibri dinamici occorre in primo luogo isolare le due masse rotanti ed evidenziare le coppie agenti su di esse, incluse quelle di natura inerziale. Indicando con ϑ_1 e ϑ_2 le rotazioni delle due masse (entrambe positive in senso orario) si ottengono le coppie indicate in Figura 2. Si osservi che il momento generato dalla torsione dell'albero è costituito da una componente elastica, proporzionale alla differenza delle rotazioni, e da una componente di natura viscosa, proporzionale alla differenza delle velocità angolari dei due dischi.

Le equazioni di moto si ricavano ponendo uguale a zero la somma algebrica delle coppie agenti su ciascuna massa rotante.

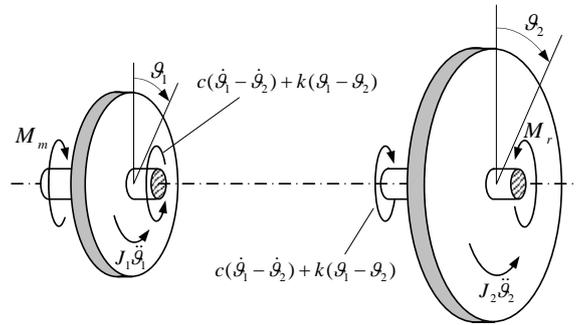


Figura 2: Coppie agenti sulle masse rotanti.

Più agevole è la deduzione delle equazioni di moto utilizzando l'approccio lagrangiano, in quanto non occorre isolare le masse rotanti. Per il sistema in esame le equazioni di Lagrange assumono la forma seguente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\vartheta}_i} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta_i} = \frac{\delta L}{\delta \vartheta_i} \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

in cui i simboli T , V e \mathcal{R} indicano rispettivamente l'energia cinetica, l'energia potenziale e la funzione di dissipazione di Rayleigh, mentre il simbolo L indica il lavoro compiuto sul sistema dalla coppia motrice M_m e dalla coppia resistente M_r . Procedendo nei calcoli si ricavano per le funzioni T , V e \mathcal{R} le espressioni seguenti:

$$T = \frac{1}{2} [J_1 \dot{\vartheta}_1^2 + J_2 \dot{\vartheta}_2^2] \quad V = \frac{1}{2} k (\vartheta_1 - \vartheta_2)^2 \quad \mathcal{R} = \frac{1}{2} c (\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2)^2 \quad (3)$$

Il lavoro elementare della coppia motrice e della coppia resistente risulta:

$$\delta L = M_m \delta \vartheta_1 - M_r \delta \vartheta_2 \quad (4)$$

da cui si ricava¹

$$\frac{\delta L}{\delta \vartheta_1} = M_m \quad \frac{\delta L}{\delta \vartheta_2} = -M_r \quad (5)$$

Sviluppando le derivate indicate nelle (2), si ottengono, con semplici passaggi, le equazioni sotto riportate:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\vartheta}_1 + c(\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2) + k(\vartheta_1 - \vartheta_2) = M_m \\ J_2 \ddot{\vartheta}_2 - c(\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2) - k(\vartheta_1 - \vartheta_2) = -M_r \end{cases} \quad (6)$$

¹Poiché le coordinate ϑ_1 e ϑ_2 sono fra di loro indipendenti, non si ha variazione della coordinata ϑ_1 quando si assegna una variazione alla coordinata ϑ_2 (e viceversa). In termini matematici ciò si traduce nelle relazioni seguenti:

$$\frac{\delta \vartheta_2}{\delta \vartheta_1} = 0 \quad \frac{\delta \vartheta_1}{\delta \vartheta_2} = 0$$

Riscrivendo tali equazioni in forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_m \\ -M_r \end{Bmatrix} \quad (7)$$

2.2 Calcolo delle pulsazioni proprie

Per il calcolo delle pulsazioni proprie occorre annullare la matrice di smorzamento ed il vettore delle azioni esterne posto al secondo membro della (7). Si ha pertanto:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Per semplicità indichiamo rispettivamente con i simboli \mathbf{J} e \mathbf{K} le matrici di massa e di rigidità del sistema in esame; come è noto, la condizione:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{J}) = 0 \quad (9)$$

fornisce l'equazione caratteristica, le cui soluzioni rappresentano le pulsazioni proprie del sistema. Per il caso in esame si ha:

$$\det \begin{bmatrix} k - \omega^2 J_1 & -k \\ -k & k - \omega^2 J_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

Sviluppando il determinante e riordinando i termini si ricava l'equazione caratteristica

$$J_1 J_2 \omega^4 - k(J_1 + J_2) \omega^2 = 0 \quad (11)$$

le cui soluzioni sono

$$\omega_0 = 0 \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} \quad (12)$$

Si osserva immediatamente che la prima pulsazione propria è nulla², in quanto il sistema è semidefinito; a conferma di questo fatto si può calcolare il determinante della matrice di rigidità \mathbf{K} , che risulta nullo. Nel paragrafo seguente dimostreremo che il modo principale di vibrare corrispondente alla pulsazione nulla è dato da una rotazione rigida del sistema (modo degenero): in altri termini tutti i dischi subiscono la stessa rotazione e l'albero risulta torsionalmente indeformato.

2.3 Calcolo dei modi principali di vibrare

Per il calcolo dei modi principali di vibrare si considera il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} k - \omega^2 J_1 & -k \\ -k & k - \omega^2 J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

nelle incognite Θ_1 e Θ_2 (ampiezze di oscillazione angolari), la cui matrice dei coefficienti, che indicheremo con il simbolo $\mathbf{\Delta}$ è data dalla relazione $\mathbf{\Delta} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{J}$. Il determinante della matrice $\mathbf{\Delta}$ è nullo in corrispondenza delle pulsazioni proprie (vedi equazione (9)) e quindi le due equazioni sono linearmente dipendenti. Utilizzando una qualsiasi delle due equazioni si ricava il rapporto fra le ampiezze di vibrazione corrispondente a ciascun modo principale di vibrare.

Considerando, ad esempio, la prima equazione del sistema (13) si ha:

$$(k - \omega^2 J_1) \Theta_1 - k \Theta_2 = 0 \quad (14)$$

e quindi:

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{k}{k - \omega^2 J_1} \quad (15)$$

²Per sottolineare il fatto che la prima pulsazione propria risulta nulla si è scelto di indicarla con ω_0 anziché con ω_1 . Seguendo questa regola, per un generico sistema semidefinito ad n gradi di libertà, le pulsazioni proprie significative saranno indicate con i simboli $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$.

Sostituendo nella (15) i valori delle pulsazioni proprie dati dalle (12) e sviluppando i calcoli, si ottengono i seguenti rapporti fra le ampiezze di oscillazione:

$$\left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)_{\omega=\omega_0} = 1 \quad \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)_{\omega=\omega_1} = -\frac{J_2}{J_1} \quad (16)$$

Si osservi che il rapporto tra le ampiezze nel secondo modo di vibrare è negativo: ciò significa che i due dischi ruotano in senso opposto.

Assumendo $\Theta_2 = 1$ si ricavano i vettori modali sotto riportati:

$$\Theta^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{array} \right\}_{\omega=\omega_0} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\} \quad \Theta^{(1)} = \left\{ \begin{array}{c} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{array} \right\}_{\omega=\omega_1} = \left\{ \begin{array}{c} -J_2/J_1 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (17)$$

Come previsto, le rotazioni risultano identiche per il vettore modale $\Theta^{(0)}$, corrispondente alla pulsazione propria nulla.

Essendo noti i vettori modali, è ora possibile tracciare i diagrammi delle deformate torsionali corrispondenti a ciascun modo principale di vibrare. Tali diagrammi sono rappresentati in Figura 3.

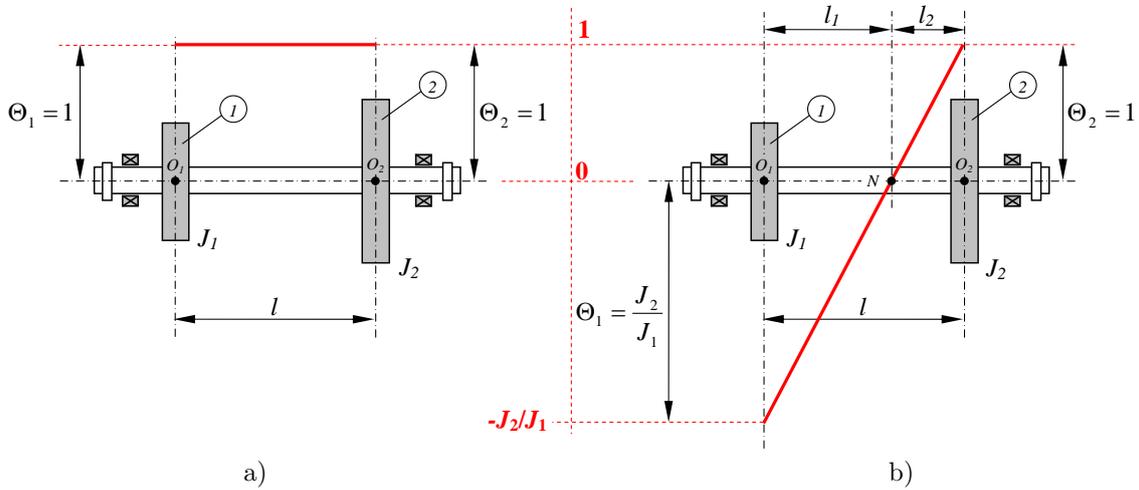


Figura 3: Forme modali dell'albero con due masse:

- a) modo rigido: $\omega = \omega_0 = 0$;
- b) modo non rigido: $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k(J_1+J_2)}{J_1J_2}}$.

Osservando il diagramma di Figura 3b si nota la presenza di un punto N (detto *nodo*), in cui l'angolo di torsione è nullo: infatti in corrispondenza di tale punto il diagramma della deformata torsionale interseca l'asse dell'albero. Si osserva che tale punto risulterebbe esattamente al centro dell'albero se i due dischi avessero lo stesso momento d'inerzia ($J_2/J_1 = 1$).

Nel caso in rappresentato in Figura 3b, in cui i dischi hanno differenti valori del momento d'inerzia, il punto N risulta più vicino al disco di inerzia maggiore; in particolare, se $J_2/J_1 \gg 1$, il punto N viene praticamente a coincidere con il punto di calettamento O_2 del disco di inerzia J_2 . Ciò significa che, a causa dell'elevato valore del momento d'inerzia J_2 (rispetto a J_1), il disco 2 può essere considerato fermo e quindi si può immaginare la presenza di un incastro in corrispondenza del punto O_2 . In questo caso la pulsazione propria del sistema tende al valore $\sqrt{k/J_1}$.

Si noti che la pulsazione propria ω_1 relativa alla forma modale di Figura 3b deve essere identica a quella dei due sottosistemi vibranti ad un solo grado di libertà rappresentati in Figura 4, ottenuti inserendo un incastro nella posizione del nodo N.

Per dimostrare questa affermazione calcoliamo innanzitutto le pulsazioni proprie ω_I e ω_{II} dei due sottosistemi; indicando rispettivamente con k_1 e k_2 le rigidità torsionali dei due tronchi di albero di lunghezza l_1 ed l_2 si ottiene:

$$\omega_I = \sqrt{\frac{k_1}{J_1}} = \sqrt{\frac{GI_p}{J_1 l_1}} \quad \omega_{II} = \sqrt{\frac{k_2}{J_2}} = \sqrt{\frac{GI_p}{J_2 l_2}} \quad (18)$$

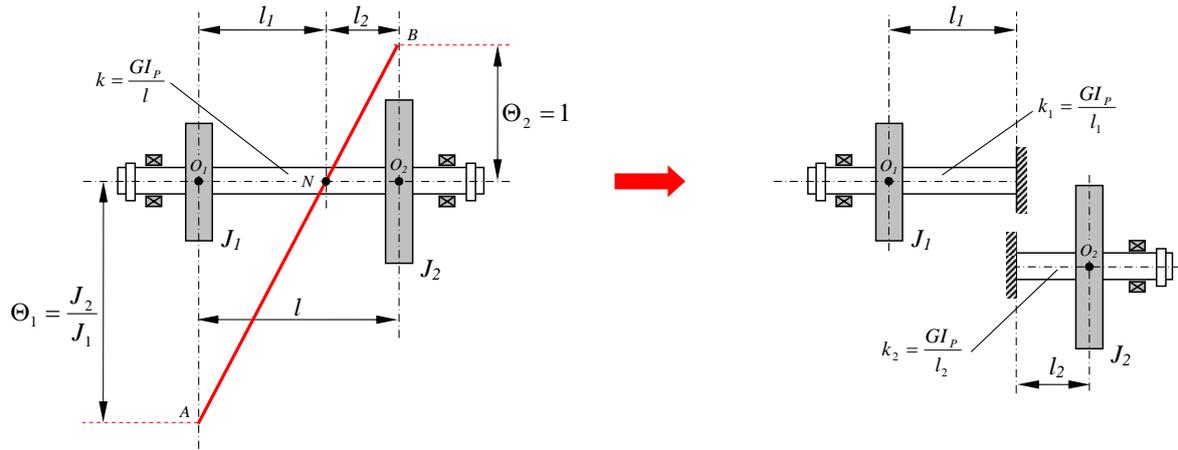


Figura 4: Partendo dalla dalla forma modale di Figura 3b ed inserendo un incastro nella posizione del nodo N , si ottengono due sottosistemi equivalenti ad un solo grado di libertà.

Tenendo presente la similitudine dei triangoli rettangoli O_1NA ed O_2NB , individuati dalla linea obliqua in Figura 4, possiamo scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = l \\ \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{l_1}{l_2} \end{cases} \quad (19)$$

in cui $\Theta_1/\Theta_2 = J_2/J_1$; (trascurando il segno negativo presente nella seconda delle (16)). Risolvendo il sistema (19) si determinano le lunghezze dei due tronchi di albero:

$$l_1 = \left(\frac{J_2}{J_1 + J_2} \right) l \quad l_2 = \left(\frac{J_1}{J_1 + J_2} \right) l \quad (20)$$

Sostituendo ora nelle (18) i valori di l_1 ed l_2 sopra ricavati e ricordando le espressioni della rigidezza k e della pulsazione ω_1 precedentemente calcolate (vedi equazioni (1) e (12)), si ottiene:

$$\begin{aligned} \omega_I &= \sqrt{\frac{GI_p}{J_1} \left(\frac{J_1 + J_2}{J_2 l} \right)} = \sqrt{\frac{GI_p}{l} \left(\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \right)} = \sqrt{\frac{k(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} = \omega_1 \\ \omega_{II} &= \sqrt{\frac{GI_p}{J_2} \left(\frac{J_1 + J_2}{J_1 l} \right)} = \sqrt{\frac{GI_p}{l} \left(\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \right)} = \sqrt{\frac{k(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} = \omega_1 \end{aligned} \quad (21)$$

2.4 Osservazioni

Il sistema costituito dalle due equazioni di moto (6) nelle variabili ϑ_1 e ϑ_2 si può trasformare in un'unica equazione differenziale utilizzando la coordinata relativa $\varphi = \vartheta_1 - \vartheta_2$. Per ricavare questa nuova equazione, dividiamo rispettivamente per J_1 e per J_2 la prima e la seconda delle (6), ottenendo in tal modo un sistema in cui i termini inerziali hanno coefficiente unitario:

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta}_1 + \frac{c}{J_1}(\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2) + \frac{k}{J_1}(\vartheta_1 - \vartheta_2) = \frac{M_m}{J_1} \\ \ddot{\vartheta}_2 - \frac{c}{J_2}(\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2) - \frac{k}{J_2}(\vartheta_1 - \vartheta_2) = -\frac{M_r}{J_2} \end{cases} \quad (22)$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni ed introducendo la coordinata relativa φ si ricava:

$$\ddot{\varphi} + c \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) \dot{\varphi} + k \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) \varphi = \frac{M_m}{J_1} + \frac{M_r}{J_2} \quad (23)$$

Tale equazione può essere riscritta nella forma:

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J'}\dot{\varphi} + \frac{k}{J'}\varphi = \tilde{M} \quad (24)$$

in cui si è posto:

$$\frac{1}{J'} = \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \quad \tilde{M} = \frac{M_m}{J_1} + \frac{M_r}{J_2} \quad (25)$$

La (24) è l'equazione di un sistema vibrante ad un grado di libertà nella coordinata relativa φ e, come tale, può essere espressa nella forma standard

$$\ddot{\varphi} + 2\xi\omega\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = \tilde{M} \quad (26)$$

in cui compaiono i parametri caratteristici del sistema vibrante (pulsazione propria e il fattore di smorzamento), che assumono le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{J'}} = \sqrt{k \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)} = \sqrt{\frac{k(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} \\ \xi &= \frac{c}{2J'\omega} = \frac{c}{2\sqrt{kJ'}} = \frac{c}{2\sqrt{k \left(\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} \right)}} \end{aligned} \quad (27)$$

Si noti che la pulsazione ω sopra calcolata coincide con la pulsazione ω_1 ricavata con il modello a due gradi di libertà; abbiamo quindi la conferma che la vibrazione libera di un disco rispetto all'altro, in assenza di smorzamento, deve avere avvenire proprio con tale frequenza.

Per concludere, verifichiamo ciò che accade quando si sommano membro a membro le equazioni di moto (6): si vede immediatamente che scompaiono i termini corrispondenti alle coppie elastiche e viscosi, in quanto sono di segno opposto; il risultato è il seguente:

$$J_1\ddot{\vartheta}_1 + J_2\ddot{\vartheta}_2 = M_m - M_r \quad (28)$$

Questa equazione, che esprime l'equilibrio dinamico alla rotazione per l'intero sistema, avrebbe potuto essere ottenuta con il metodo degli equilibri dinamici, applicandolo all'insieme dei due dischi (collegati tramite l'albero di massa trascurabile), senza isolare le singole masse rotanti, come invece avviene in Figura 2. Chiaramente le coppie elastiche e viscosi non compaiono nell'equilibrio del sistema globale, in quanto risultano azioni interne.

Supponendo ora che le azioni motrici e resistenti siano nulle (situazione di moto libero), il secondo membro della (28) diventa nullo:

$$J_1\ddot{\vartheta}_1 + J_2\ddot{\vartheta}_2 = 0 \quad (29)$$

Integrando rispetto al tempo si ottiene:

$$J_1\dot{\vartheta}_1 + J_2\dot{\vartheta}_2 = A = \text{cost.} \quad (30)$$

equazione che esprime la costanza del momento angolare per il sistema in esame.

3 Albero con tre masse

Passiamo ora ad analizzare le vibrazioni torsionali di un albero su cui sono calettate tre masse aventi momento d'inerzia J_1 , J_2 e J_3 (vedi Figura 5). Essendo note le dimensioni geometriche di ciascun tronco d'albero ed il modulo elastico G del materiale utilizzato per la sua costruzione, è immediato calcolare le corrispondenti rigidità torsionali; in base alla (1) si ha infatti:

$$k_i = \frac{GI_{p_i}}{l_i} = \frac{\pi G d_i^4}{32 l_i} \quad i = 1, 2 \quad (31)$$

Anche in questo caso gli effetti dissipativi vengono considerati attraverso l'introduzione delle costanti di smorzamento viscoso c_1 e c_2 , una per ciascun tronco d'albero.

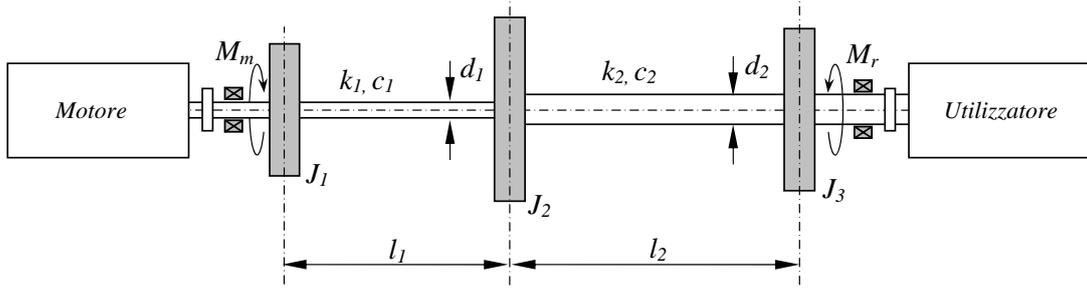


Figura 5: Sistema costituito da tre dischi collegati da tronchi di albero deformabili a torsione.

3.1 Scrittura delle equazioni di moto

Per la scrittura delle equazioni di moto utilizziamo il metodo di Lagrange, già introdotto nel paragrafo 2; indicando con ϑ_i la rotazione del disco i -esimo ed adottando la medesima convenzione di segno per le tre coordinate, si ha:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\vartheta}_i} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta_i} = \frac{\delta L}{\delta \vartheta_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (32)$$

Per il sistema in esame, l'energia cinetica T , l'energia potenziale V e la funzione di dissipazione \mathcal{R} assumono le espressioni seguenti:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \dot{\vartheta}_i^2 \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_i (\vartheta_i - \vartheta_{i+1})^2 \quad \mathcal{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 c_i (\dot{\vartheta}_i - \dot{\vartheta}_{i+1})^2 \quad (33)$$

Il lavoro elementare della coppia motrice e della coppia resistente risulta:

$$\delta L = M_m \delta \vartheta_1 - M_r \delta \vartheta_3 \quad (34)$$

e pertanto:

$$\frac{\delta L}{\delta \vartheta_1} = M_m \quad \frac{\delta L}{\delta \vartheta_2} = 0 \quad \frac{\delta L}{\delta \vartheta_3} = -M_r \quad (35)$$

Svolgendo i calcoli si ottengono, dopo alcuni passaggi, le equazioni seguenti:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\vartheta}_1 + c_1 \dot{\vartheta}_1 - c_1 \dot{\vartheta}_2 + k_1 \vartheta_1 - k_1 \vartheta_2 = M_m \\ J_2 \ddot{\vartheta}_2 - c_1 \dot{\vartheta}_1 + (c_1 + c_2) \dot{\vartheta}_2 - c_2 \dot{\vartheta}_3 - k_1 \vartheta_1 + (k_1 + k_2) \vartheta_2 - k_2 \vartheta_3 = 0 \\ J_3 \ddot{\vartheta}_3 - c_2 \dot{\vartheta}_2 + c_2 \dot{\vartheta}_3 - k_2 \vartheta_2 + k_2 \vartheta_3 = -M_r \end{cases} \quad (36)$$

Utilizzando la notazione matriciale, le equazioni di moto assumono la forma sotto riportata:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \\ \ddot{\vartheta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & (c_1 + c_2) & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_m \\ 0 \\ -M_r \end{Bmatrix} \quad (37)$$

In forma compatta si può scrivere l'equazione:

$$\mathbf{J} \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{M}_{\text{ext}} \quad (38)$$

in cui $\boldsymbol{\vartheta} = \{\vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \vartheta_3\}^T$ è il vettore delle coordinate angolari e $\mathbf{M}_{\text{ext}} = \{M_m \ 0 \ -M_r\}^T$ il vettore delle azioni esterne; i simboli \mathbf{J} , \mathbf{C} e \mathbf{K} indicano rispettivamente le matrici di inerzia, smorzamento e rigidezza, definite nel modo seguente:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & (c_1 + c_2) & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

3.2 Calcolo delle pulsazioni proprie

Per il calcolo delle pulsazioni proprie occorre, come di consueto, eliminare lo smorzamento e le azioni forzanti. Seguendo il procedimento indicato nel paragrafo 2.2 imponiamo la condizione:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{J}) = 0 \quad (40)$$

che, in base alle definizioni suddette, diviene:

$$\det \begin{bmatrix} k_1 - \omega^2 J_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) - \omega^2 J_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 - \omega^2 J_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (41)$$

Sviluppando il determinante³ si ricava l'equazione caratteristica, che assume l'espressione di un polinomio di sesto grado, privo del termine noto⁴ e dei termini contenenti delle potenze dispari di ω :

$$A\omega^6 + B\omega^4 + C\omega^2 = 0 \quad (42)$$

I coefficienti del polinomio, espressi in funzione dei parametri di massa e di rigidità del sistema, sono dati dalle espressioni sotto riportate:

$$\begin{aligned} A &= J_1 J_2 J_3 \\ B &= -(k_1 J_1 J_3 + k_2 J_1 J_2 + k_1 J_2 J_3 + k_2 J_1 J_3) \\ C &= k_1 k_2 (J_1 + J_2 + J_3) \end{aligned} \quad (43)$$

Dividendo per il coefficiente A tutti i termini della (42) e raccogliendo il termine ω^2 si ricava:

$$\omega^2(\omega^4 - 2\alpha\omega^2 + \beta) = 0 \quad (44)$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{B}{2A} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{J_1} + \frac{k_1 + k_2}{J_2} + \frac{k_2}{J_3} \right) \\ \beta &= \frac{C}{A} = \frac{k_1 k_2}{J_1 J_2 J_3} (J_1 + J_2 + J_3) \end{aligned} \quad (45)$$

Le soluzioni della (44) sono:

$$\omega_0 = 0 \quad \omega_{1,2} = \sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \quad (46)$$

La presenza di una pulsazione propria nulla era prevedibile, in quanto il sistema in esame ammette una possibilità di moto rigido. A conferma di questo fatto si può calcolare simbolicamente il determinante della matrice di rigidità (vedi equazione (39)) e verificare che il suo valore è sempre nullo, indipendentemente dai valori assegnati alle rigidità dei due tronchi d'albero.

3.3 Calcolo dei modi principali di vibrare

Per calcolo dei modi principali di vibrare si deve considerare il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{bmatrix} k_1 - \omega^2 J_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) - \omega^2 J_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 - \omega^2 J_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

È ovvio che le tre equazioni risultano linearmente dipendenti in quanto si è imposto l'annullamento del determinante della matrice dei coefficienti: basta quindi considerare solo due delle tre equazioni, per ricavare i rapporti fra le ampiezze di oscillazione. Per semplificare i calcoli, possiamo utilizzare la prima e la terza equazione (che contengono solo due delle tre coordinate), ottenendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} (k_1 - \omega^2 J_1)\Theta_1 - k_1\Theta_2 = 0 \\ -k_2\Theta_2 + (k_2 - \omega^2 J_3)\Theta_3 = 0 \end{cases} \quad (48)$$

³Per semplificare i calcoli si consiglia di effettuare lo sviluppo rispetto alla prima riga o alla prima colonna, che contengono un elemento nullo.

⁴La mancanza del termine noto indica che il sistema vibrante in esame possiede una pulsazione propria nulla e quindi è un sistema semidefinito.

Dalle (48) si possono facilmente ricavare i rapporti fra le ampiezze di oscillazione:

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_3} = \frac{1 - \omega^2 \frac{J_3}{k_2}}{1 - \omega^2 \frac{J_1}{k_1}} \quad \frac{\Theta_2}{\Theta_3} = 1 - \omega^2 \frac{J_3}{k_2} \quad (49)$$

Si osservi che, sostituendo nelle (49) il valore $\omega = \omega_0 = 0$ si ottengono rapporti fra le ampiezze unitari (ovvero $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$); si ha quindi la conferma che tutti i dischi sono soggetti alla stessa rotazione e l'albero non viene deformato a torsione.

Il calcolo delle deformate modali corrispondenti alle pulsazioni proprie diverse da zero può essere effettuato senza particolari difficoltà avendo a disposizione i valori numerici dei momenti d'inerzia e delle rigidità torsionali.

Nel caso particolare in cui i dischi possiedano il medesimo momento d'inerzia J e i due tronchi d'albero presentino lo stesso valore di rigidità k si parla di *catena torsionale omogenea a tre gradi di libertà*; in questo caso il sistema di equazioni (47) diviene:

$$\begin{bmatrix} k - \omega^2 J & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 J & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (50)$$

e l'equazione caratteristica assume la forma seguente:

$$\omega^6 - \frac{4k}{J}\omega^4 + \frac{3k^2}{J^2}\omega^2 = 0 \quad (51)$$

Risolvendo la (51) si ottengono le pulsazioni proprie:

$$\omega_0 = 0 \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{J}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{J}} = \sqrt{3}\omega_1 \quad (52)$$

Per il calcolo dei rapporti fra le ampiezze di oscillazione utilizziamo la prima e la seconda equazione⁵ del sistema (50):

$$\begin{cases} (k - \omega^2 J)\Theta_1 - k\Theta_2 = 0 \\ -k\Theta_1 + (2k - \omega^2 J)\Theta_2 - k\Theta_3 = 0 \end{cases} \quad (53)$$

I rapporti fra le ampiezze risultano pertanto:

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_3} = \frac{1}{1 - 3\omega^2 \frac{J}{k} + \omega^4 \left(\frac{J}{k}\right)^2} \quad \frac{\Theta_2}{\Theta_3} = \frac{1 - \omega^2 \frac{J}{k}}{1 - 3\omega^2 \frac{J}{k} + \omega^4 \left(\frac{J}{k}\right)^2} \quad (54)$$

Sostituendo nelle (54) i valori delle pulsazioni proprie riportati nelle (52) si ricavano i rapporti fra le ampiezze di vibrazione corrispondenti a ciascun modo principale di vibrare; ponendo poi $\Theta_3 = 1$ si ricavano i seguenti vettori modali:

$$\Theta^{(0)} = \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_0} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \Theta^{(1)} = \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_1} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \Theta^{(2)} = \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_2} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

I diagrammi delle deformate modali sono rappresentati in Figura 6.

⁵Come il lettore può facilmente verificare, utilizzando la prima e la terza equazione, il rapporto Θ_1/Θ_3 risulta indeterminato quando $\omega = \omega_1 = \sqrt{k/J}$. Ciò è dovuto al fatto che la prima e la terza equazione non sono indipendenti per questo valore di ω .

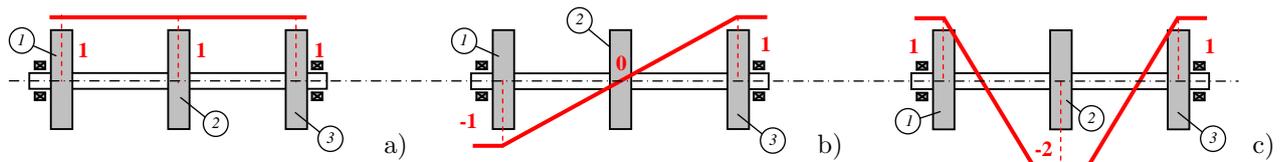


Figura 6: Deformate modali per una catena torsionale omogenea costituita da tre dischi: a) $\omega = 0$; b) $\omega = \sqrt{k/J}$; c) $\omega = \sqrt{3k/J}$.

Esempio 1

Determinare le pulsazioni proprie e le deformate modali relative alle vibrazioni torsionali dell'albero rappresentato in Figura 7 sul quale sono calettati tre dischi di differente momento d'inerzia. Si supponga che l'albero, realizzato in acciaio, abbia una massa trascurabile rispetto a quella dei dischi.

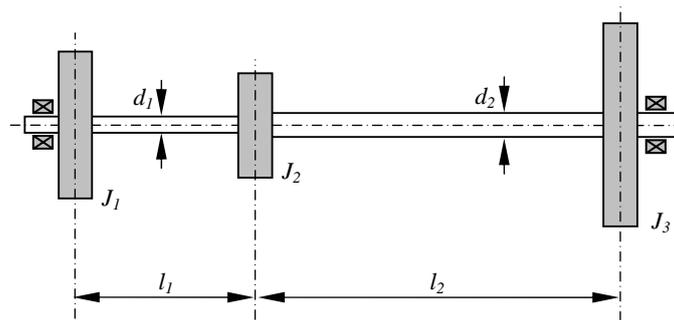


Figura 7: Albero con tre dischi.

Dati

- Momenti d'inerzia dei tre dischi $J_1 = 3 \text{ kg m}^2$ $J_2 = 2 \text{ kg m}^2$ $J_3 = 5 \text{ kg m}^2$
- Lunghezze dei due tratti di albero $l_1 = 300 \text{ mm}$ $l_2 = 600 \text{ mm}$
- Diametro dei due tratti di albero $d_1 = 25 \text{ mm}$ $d_2 = 35 \text{ mm}$
- Modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio $G = 80000 \text{ MPa}$

Soluzione

In base alla (31) le rigidezze torsionali k_1 e k_2 dei due tronchi di albero risultano:

$$k_1 = \frac{\pi G d_1^4}{32 l_1} = \frac{\pi \times (8 \times 10^{10}) \times (0.025)^4}{32 \times 0.3} = 10226.5 \text{ Nm/rad}$$

$$k_2 = \frac{\pi G d_2^4}{32 l_2} = \frac{\pi \times (8 \times 10^{10}) \times (0.035)^4}{32 \times 0.6} = 19643.1 \text{ Nm/rad}$$

[E.1]

Con i dati assegnati e utilizzando le (39) otteniamo le matrici di inerzia e di rigidezza di seguito riportate:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10226.5 & -10226.5 & 0 \\ -10226.5 & 29869.7 & -19643.1 \\ 0 & -19643.1 & 19643.1 \end{bmatrix}$$

[E.2]

Per il calcolo delle pulsazioni proprie possiamo utilizzare la relazione (46), nella quale devono essere inseriti i valori di α e β dati dalle (45). Con i dati assegnati si ottiene:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{J_1} + \frac{k_1 + k_2}{J_2} + \frac{k_2}{J_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{10226.5}{3} + \frac{10226.5 + 19643.1}{2} + \frac{19643.1}{5} \right) = 11136.16 \text{ s}^{-2}$$

$$\beta = \frac{k_1 k_2}{J_1 J_2 J_3} (J_1 + J_2 + J_3) = \frac{10226.5 \times 19643.1}{3 \times 2 \times 5} (3 + 2 + 5) = 6.696043 \times 10^7 \text{ s}^{-4}$$
[E.3]

Pertanto le pulsazioni proprie risultano:

$$\omega_0 = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}} = \sqrt{11136.16 - \sqrt{11136.16^2 - 6.696043 \times 10^7}} = 59.86 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}} = \sqrt{11136.16 + \sqrt{11136.16^2 - 6.696043 \times 10^7}} = 136.71 \text{ rad/s}$$
[E.4]

Per il calcolo dei vettori modali utilizziamo le relazioni (49) e normalizziamo i vettori ponendo uguale all'unità l'ampiezza Θ_3 ; Il generico vettore modale Θ risulterà quindi:

$$\Theta(\omega) = \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \omega^2 \frac{J_3}{k_2} \\ 1 - \omega^2 \frac{J_1}{k_1} \\ 1 - \omega^2 \frac{J_3}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$
[E.5]

Utilizzando i dati forniti e i valori delle pulsazioni proprie sopra calcolate, i tre vettori modali risultano:

$$\Theta^{(0)} = \Theta(\omega_0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$
[E.6]

$$\Theta^{(1)} = \Theta(\omega_1) = \begin{Bmatrix} 1 - 59.86^2 \times \left(\frac{5}{19643.1} \right) \\ 1 - 59.86^2 \times \left(\frac{3}{10226.5} \right) \\ 1 - 59.86^2 \times \left(\frac{5}{19643.1} \right) \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.725 \\ 0.088 \\ 1 \end{Bmatrix}$$
[E.7]

$$\Theta^{(2)} = \Theta(\omega_2) = \begin{Bmatrix} 1 - 136.71^2 \times \left(\frac{5}{19643.1} \right) \\ 1 - 136.71^2 \times \left(\frac{3}{10226.5} \right) \\ 1 - 136.71^2 \times \left(\frac{5}{19643.1} \right) \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.838 \\ -3.757 \\ 1 \end{Bmatrix}$$
[E.8]

La rappresentazione grafica delle deformate modali dell'albero è riportata in Figura 8; i riquadri in rosso indicano la posizione dei dischi.

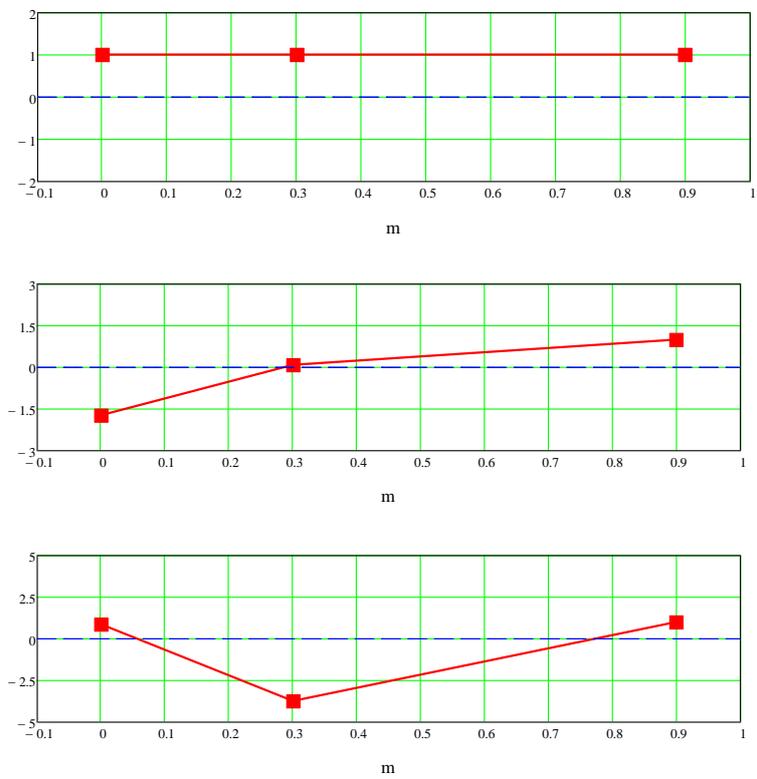


Figura 8: Deformate modali dell'albero con tre dischi rappresentato in Figura 7.