

Analisi modale

1 Disaccoppiamento delle equazioni di moto

Le coordinate che vengono comunemente utilizzate per studiare le vibrazioni di un sistema a più gradi di libertà hanno un evidente significato fisico, in quanto rappresentano spostamenti lineari o angolari di elementi costituenti il dispositivo in esame. Tali coordinate hanno quindi un notevole interesse dal punto di vista pratico, poiché il loro andamento nel tempo fornisce immediatamente il moto vibratorio di ogni elemento del sistema.

In generale, però, se tali coordinate vengono utilizzate per la scrittura delle equazioni di moto, si ottiene un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine; trattandosi di un sistema, è chiaro che le equazioni non possono essere risolte separatamente, in quanto in ciascuna di esse sono presenti più incognite.

L'accoppiamento fra le equazioni appare subito evidente se si utilizza la notazione matriciale: infatti, la presenza di elementi non nulli all'esterno della diagonale principale nelle matrici di massa, di rigidità e di smorzamento indica chiaramente la presenza un accoppiamento di natura inerziale, elastica o smorzante fra i vari gradi di libertà del sistema in esame. Se le tre matrici risultassero tutte diagonali, le n equazioni di moto risulterebbero completamente disaccoppiate e pertanto non si avrebbe più un sistema vibrante ad n gradi di libertà, bensì n sistemi indipendenti ad un solo grado di libertà. In questo caso le equazioni di moto potrebbero essere risolte separatamente, con grande vantaggio dal punto di vista dei calcoli.

Sulla base di tali premesse appare quindi importante individuare un metodo che permetta di disaccoppiare completamente le equazioni di moto. Nella teoria delle vibrazioni tale metodo è noto con il nome di *analisi modale*: si tratta di un procedimento di tipo generale, applicabile a tutti i sistemi vibranti lineari a più gradi di libertà. In estrema sintesi, si può dire che il metodo utilizza una trasformazione di coordinate, grazie alla quale equazioni di moto vengono riscritte utilizzando un nuovo insieme di coordinate, dette *coordinate principali* o *coordinate modali*. Nei paragrafi seguenti il procedimento di calcolo delle coordinate principali verrà descritto nei dettagli.

2 Ortogonalità dei vettori modali

Prima di analizzare nei dettagli il metodo a cui si è fatto cenno nel paragrafo precedente, è necessario dimostrare una interessante proprietà dei vettori modali comunemente indicata con il nome di *ortogonalità*. La dimostrazione di tale proprietà costituisce il fondamento su cui si basa l'analisi modale e permette di comprendere il motivo per cui è possibile ottenere equazioni di moto in forma disaccoppiata.

In precedenza si è visto che, per un generico sistema ad n gradi di libertà non smorzato vale la relazione:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (1)$$

in cui ω indica una delle pulsazioni proprie del sistema ed \mathbf{X} il corrispondente vettore modale. Tale relazione può essere riscritta nella forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{X} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{X} \quad (2)$$

Consideriamo ora due pulsazioni proprie ω_i e ω_j (con $i \neq j$), a cui corrispondono i vettori modali \mathbf{X}_i e \mathbf{X}_j ; in base alla (2) si avrà:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{X}_i &= \omega_i^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_i \\ \mathbf{K}\mathbf{X}_j &= \omega_j^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_j \end{aligned} \quad (3)$$

Moltiplichiamo la prima delle (3) per il vettore \mathbf{X}_j^T e la seconda per il vettore \mathbf{X}_i^T :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_j^T \mathbf{K}\mathbf{X}_i &= \omega_i^2 \mathbf{X}_j^T \mathbf{M}\mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_i^T \mathbf{K}\mathbf{X}_j &= \omega_j^2 \mathbf{X}_i^T \mathbf{M}\mathbf{X}_j \end{aligned} \quad (4)$$

Consideriamo ora la prima delle (4) e calcoliamo il trasposto di ambo i membri:

$$(\mathbf{X}_j^T \mathbf{K} \mathbf{X}_i)^T = \omega_i^2 (\mathbf{X}_j^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i)^T \quad (5)$$

Ricordando che il trasposto del prodotto di due o più matrici è uguale al prodotto di tali matrici prese in ordine inverso¹ e che, per la simmetria delle matrici di massa e di rigidità si ha $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ e $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$, la (5) diviene:

$$\mathbf{X}_i^T \mathbf{K} \mathbf{X}_j = \omega_i^2 \mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_j \quad (6)$$

Sottraendo membro a membro la seconda delle (4) dalla (6) si ricava:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_j = 0 \quad (7)$$

Poiché $\omega_i \neq \omega_j$ deve risultare, per la (7):

$$\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_j = 0 \quad i \neq j \quad (8)$$

Considerando ora la (8) e la seconda delle (4) si deduce immediatamente che:

$$\mathbf{X}_i^T \mathbf{K} \mathbf{X}_j = 0 \quad i \neq j \quad (9)$$

Le relazioni (8) e (9) esprimono la *proprietà di ortogonalità* dei vettori modali \mathbf{X}_i e \mathbf{X}_j rispetto alle matrici di massa e di rigidità. Per $i = j$ i prodotti $\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_j$ e $\mathbf{X}_i^T \mathbf{K} \mathbf{X}_j$ che compaiono al primo membro delle suddette relazioni di ortogonalità forniscono un risultato non nullo; si avrà quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i &= m_{ii}^* \neq 0 & i &= 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{X}_i^T \mathbf{K} \mathbf{X}_i &= k_{ii}^* \neq 0 & i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (10)$$

Giunti a questo punto, definiamo una particolare matrice quadrata Φ (di dimensione $n \times n$) detta *matrice modale*, le cui colonne sono costituite dai vettori modali:

$$\Phi = [\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2 \ \dots \ \mathbf{X}_n] \quad (11)$$

Sulla base di quanto sopra dimostrato, se calcoliamo i prodotti matriciali $\Phi^T \mathbf{M} \Phi$ e $\Phi^T \mathbf{K} \Phi$ si ottengono i seguenti risultati:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T \mathbf{M} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1^T \mathbf{M} \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_1^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n \\ \mathbf{X}_2^T \mathbf{M} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2^T \mathbf{M} \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_2^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{22}^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{nn}^* \end{bmatrix} = \mathbf{M}^* \quad (12)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T \mathbf{K} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1^T \mathbf{K} \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_1^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n \\ \mathbf{X}_2^T \mathbf{K} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2^T \mathbf{K} \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_2^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{22}^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nn}^* \end{bmatrix} = \mathbf{K}^* \quad (13)$$

Come si può osservare, le matrici \mathbf{M}^* e \mathbf{K}^* risultano diagonali proprio grazie alla proprietà di ortogonalità dei vettori modali.

Se i vettori modali vengono opportunamente normalizzati la matrice \mathbf{M}^* diviene uguale alla matrice identità \mathbf{I} di ordine n ; per ottenere questo risultato è necessario che:

$$\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i = m_{ii}^* = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

¹In termini strettamente matematici possiamo affermare che, date n matrici A_1, A_2, \dots, A_n , vale la seguente relazione:

$$\left(\prod_{i=1}^n A_i \right)^T = \prod_{i=n}^1 A_i^T$$

ovvero:

$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n)^T = \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_{n-1}^T \dots \mathbf{A}_1^T$$

Pertanto ogni vettore modale \mathbf{X}_i dovrà essere moltiplicato per un opportuno coefficiente μ_i che soddisfi la condizione:

$$(\mu_i \mathbf{X}_i^T) \mathbf{M} (\mu_i \mathbf{X}_i) = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

da cui:

$$\mu_i = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

Se vale la (14), è evidente che la (6), calcolata per $i = j$ produce il seguente risultato:

$$\mathbf{X}_i^T \mathbf{K} \mathbf{X}_i = \omega_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

In altri termini, quando la matrice di massa \mathbf{M}^* diviene uguale alla matrice identità, la matrice \mathbf{K}^* presenta sulla sua diagonale i quadrati delle pulsazioni proprie del sistema vibrante; indicando tale matrice con il simbolo \mathbf{W} , possiamo quindi scrivere:

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^* = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

3 Analisi modale di sistemi non smorzati

Consideriamo un generico sistema vibrante lineare a più gradi di libertà sottoposto all'azione di forzanti esterne; se il sistema è privo di smorzamento le equazioni di moto, scritte in forma matriciale, assumono la forma seguente:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (19)$$

Per determinare la soluzione della (19) mediante l'analisi modale occorre innanzitutto calcolare le pulsazioni proprie $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ del sistema e i corrispondenti vettori modali $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ mediante i procedimenti illustrati nei precedenti paragrafi.

Utilizzando i vettori modali, si costruisce la matrice:

$$\Phi = [\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2 \ \dots \ \mathbf{X}_n] \quad (20)$$

che, come si è detto nel paragrafo 2, viene definita *matrice modale*. Con tale matrice è possibile definire una trasformazione lineare fra il vettore $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)\}^T$ delle n coordinate fisiche ed il vettore $\mathbf{p}(t) = \{p_1(t) \ p_2(t) \ \dots \ p_n(t)\}^T$ delle n coordinate principali (o modali):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{p}(t) \quad (21)$$

Tale relazione, se viene sviluppata secondo le regole del calcolo matriciale, può essere riscritta nella forma:

$$\mathbf{x}(t) = p_1(t) \mathbf{X}_1 + p_2(t) \mathbf{X}_2 + \dots + p_n(t) \mathbf{X}_n = \sum_{i=1}^n p_i(t) \mathbf{X}_i \quad (22)$$

che mostra chiaramente come il vettore delle coordinate fisiche si possa esprimere come una combinazione lineare dei vettori modali: i coefficienti di tale combinazione sono proprio le coordinate principali $p_i(t)$, che ovviamente sono funzioni del tempo.

Per questo motivo le coordinate principali vengono anche chiamate *coefficienti di partecipazione modale*, in quanto esse costituiscono i *pesi* con i quali i singoli vettori modali contribuiscono a generare la soluzione.

Derivando due volte rispetto al tempo la (21) si ricava:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \Phi \ddot{\mathbf{p}}(t) \quad (23)$$

Sostituiamo ora la (21) e la (23) nella (19):

$$\mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K} \Phi \mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (24)$$

Premoltiplicando ambo i membri per Φ^T si ricava:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{p}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{p} = \Phi^T \mathbf{F} \quad (25)$$

ovvero:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}^* \mathbf{p} = \mathbf{Q} \quad (26)$$

in cui:

$$\mathbf{Q} = \Phi^T \mathbf{F} \quad (27)$$

indica il nuovo vettore dei termini forzanti, mentre \mathbf{M}^* e \mathbf{K}^* sono le matrici diagonali definite dalle (12) e (13).

Chiaramente l'equazione matriciale (26) corrisponde ad n equazioni differenziali indipendenti, che possono essere risolte separatamente. Dopo aver ottenuto la soluzione in coordinate principali, le coordinate fisiche si ottengono mediante la trasformazione (21). Nel paragrafo 2 abbiamo visto che, se i vettori modali vengono moltiplicati per i coefficienti μ_i definiti dalla (16), la matrice \mathbf{M}^* diviene la matrice identità \mathbf{I} , mentre la matrice \mathbf{K}^* si trasforma nella matrice \mathbf{W} che contiene sulla diagonale i quadrati delle pulsazioni proprie. In questo caso l'equazione (26) assume la forma sotto riportata:

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{W} \mathbf{p} = \mathbf{Q} \quad (28)$$

In forma scalare la scrittura matriciale (28) corrisponde alle seguenti n equazioni scalari:

$$\ddot{p}_i(t) + \omega_i^2 p_i(t) = Q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

ciascuna delle quali assume la forma tipica dell'equazione differenziale di un sistema ad un grado di libertà sottoposto all'azione di una forzante variabile nel tempo. La soluzione di ciascuna delle n equazioni (29) si può ottenere in forma generale utilizzando l'integrale di convoluzione. Se si parte da condizioni iniziali non nulle la soluzione assume la forma seguente:

$$p_i(t) = p_i(0) \cos \omega_i t + \left(\frac{\dot{p}_i(0)}{\omega_i} \right) \sin \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t Q_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (30)$$

Un altro metodo di soluzione, come è noto, consiste nel sommare la soluzione dell'equazione omogenea alla soluzione particolare; quest'ultima viene scelta nella stessa classe di funzioni a cui appartiene il termine forzante. Per maggiori dettagli si veda il capitolo 5.

Per il calcolo delle condizioni iniziali in coordinate principali si considerano la trasformazione lineare (21) e la sua derivata prima, calcolandole in $t = 0$:

$$\mathbf{x}(0) = \Phi \mathbf{p}(0) \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \Phi \dot{\mathbf{p}}(0) \quad (31)$$

Invertendo tali relazioni, si ricavano i vettori $\mathbf{p}(0)$ e $\dot{\mathbf{p}}(0)$ delle posizioni e delle velocità in coordinate principali:

$$\mathbf{p}(0) = \Phi^{-1} \mathbf{x}(0) \quad \dot{\mathbf{p}}(0) = \Phi^{-1} \dot{\mathbf{x}}(0) \quad (32)$$

L'uso delle relazioni (32) richiede di calcolare l'inversa della matrice modale; ciò non costituisce un problema se si dispone di una procedura per l'inversione di una matrice. Tuttavia, per evitare di calcolare la matrice Φ^{-1} si può utilizzare la seguente relazione²:

$$\Phi^{-1} = \Phi^T \mathbf{M} \quad (33)$$

che risulta valida solo se si normalizzano gli autovettori in modo che $\mathbf{M}^* = \mathbf{I}$; grazie a tale relazione il calcolo risulta notevolmente semplificato, in quanto richiede soltanto la trasposizione della matrice modale e la sua moltiplicazione per la matrice di massa.

Dopo aver ottenuto la soluzione $\mathbf{p}(t)$ in coordinate principali, è possibile calcolare la soluzione $\mathbf{x}(t)$ nelle coordinate fisiche applicando la (21).

²Per dimostrare la (33), moltiplichiamo ambo i membri della (21) per $\Phi^T \mathbf{M}$:

$$\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{x}(t) = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{p}(t)$$

da cui, per $t = 0$:

$$\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{x}(0) = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{p}(0)$$

Poiché $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{M}^* = \mathbf{I}$ quando gli autovettori sono normalizzati tramite i coefficienti μ_i definiti dalla (16), si ottiene:

$$\mathbf{p}(0) = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{x}(0)$$

Confrontando questa relazione con la prima delle (32) si deduce che:

$$\Phi^{-1} = \Phi^T \mathbf{M}$$

4 Analisi modale di sistemi smorzati (con smorzamento proporzionale)

Nel paragrafo precedente si è presentato il metodo dell'analisi modale applicandolo a sistemi non smorzati. Poiché, come è noto, i sistemi reali presentano sempre un certo grado di smorzamento a causa dei fenomeni di dissipazione energetica, i calcoli effettuati mediante il modello privo di smorzamento forniscono risultati significativi soltanto quando l'effetto dei fenomeni di attrito è limitato e quindi trascurabile.

In questo paragrafo vedremo come il metodo dell'analisi modale possa essere applicato a sistemi smorzati. Prima di analizzare gli aspetti matematici occorre ricordare che la proprietà di ortogonalità dei vettori modali non è in generale valida rispetto alla matrice di smorzamento \mathbf{C} ; quindi, dati due vettori modali \mathbf{X}_i e \mathbf{X}_j con $i \neq j$, il prodotto $\mathbf{X}_i^T \mathbf{C} \mathbf{X}_j$ è in generale diverso da zero. Ciò significa che, anche utilizzando le coordinate principali, la presenza dello smorzamento non permette di disaccoppiare completamente le equazioni di moto.

Per risolvere questo problema si deve utilizzare il metodo descritto nel paragrafo seguente. Tuttavia, essendo tale procedimento piuttosto laborioso, buoni risultati si possono ottenere introducendo l'ipotesi di *smorzamento proporzionale* (o *smorzamento di Rayleigh*), secondo la quale la matrice di smorzamento viene espressa come combinazione lineare delle matrici di massa e di rigidità; supponendo noti i due coefficienti di proporzionalità, che indicheremo con i simboli α e β , possiamo quindi scrivere:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (34)$$

In base a tali considerazioni, la generica equazione di moto di un sistema vibrante smorzato:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (35)$$

diviene:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (36)$$

Introducendo nella (36) la trasformazione in coordinate principali (21) si ha:

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{p}} + (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K})\Phi\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}\Phi\mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (37)$$

Premoltiplicando ambo i membri per Φ^T si ottiene:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{p}} + (\alpha \Phi^T \mathbf{M} \Phi + \beta \Phi^T \mathbf{K} \Phi) \dot{\mathbf{p}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{p} = \Phi^T \mathbf{F} \quad (38)$$

In base alle definizioni date nelle (12), (13) e (27) l'equazione (38) si può riscrivere nella forma:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{p}} + (\alpha \mathbf{M}^* + \beta \mathbf{K}^*) \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}^* \mathbf{p} = \mathbf{Q} \quad (39)$$

Giunti a questo punto, possiamo definire la matrice:

$$\mathbf{C}^* = \alpha \mathbf{M}^* + \beta \mathbf{K}^* \quad (40)$$

che risulta ovviamente diagonale, in quanto combinazione lineare delle due matrici diagonali \mathbf{M}^* e \mathbf{K}^* . Utilizzando questa definizione l'equazione matriciale (39) diviene:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}^* \mathbf{p} = \mathbf{Q} \quad (41)$$

Abbiamo così ottenuto le equazioni di moto in forma disaccoppiata per un sistema vibrante smorzato ad n gradi di libertà. Anche in questo caso, si possono normalizzare gli autovettori in modo che $\mathbf{M}^* = \mathbf{I}$ e $\mathbf{K}^* = \mathbf{W}$; operando in tal modo le (40) e (41) assumono la forma seguente:

$$\mathbf{C}^* = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{W} \quad (42)$$

$$\ddot{\mathbf{p}} + (\alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{W}) \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{W} \mathbf{p} = \mathbf{Q} \quad (43)$$

L'equazione matriciale (43) contiene le seguenti n equazioni scalari:

$$\ddot{p}_i(t) + (\alpha + \omega_i^2 \beta) \dot{p}_i(t) + \omega_i^2 p_i(t) = Q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (44)$$

nelle quali i termini al primo membro dipendenti dalle velocità $\dot{p}_i(t)$ sono dovuti alla presenza dello smorzamento. Ponendo ora:

$$\alpha + \omega_i^2 \beta = 2\xi_i \omega_i \quad (45)$$

le equazioni (44) si possono riscrivere nella forma:

$$\ddot{p}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{p}_i(t) + \omega_i^2 p_i(t) = Q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (46)$$

Il parametro ξ_i viene chiamato *fattore di smorzamento modale* per l' i -esimo modo principale di vibrare. Esso può essere facilmente calcolato se si conoscono i coefficienti α e β e la pulsazione propria ω_i dell' i -esimo modo principale di vibrare; infatti, dalla (45) si ha:

$$\xi_i = \frac{\alpha + \omega_i^2 \beta}{2\omega_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \omega_i \beta \right) \quad (47)$$

Le 46 sono n equazioni differenziali del secondo ordine che possono essere risolte con due differenti procedimenti, già illustrati nel capitolo 5 per i sistemi vibranti smorzati ad un solo grado di libertà. Utilizzando primo procedimento, la soluzione completa viene ottenuta nella forma:

$$p_i(t) = p_i^{(h)}(t) + p_i^{(p)}(t) \quad (48)$$

dove le funzioni $p_i^{(h)}(t)$ e $p_i^{(p)}(t)$ indicano rispettivamente la soluzione dell'equazione omogenea associata e la soluzione particolare dell'equazione completa. Se invece si utilizza il secondo metodo, la soluzione si calcola nel modo seguente:

$$p_i(t) = p_i^{(l)}(t) + p_i^{(f)}(t) \quad (49)$$

in cui $p_i^{(f)}(t)$ indica la soluzione relativa alle vibrazioni libere (derivante da condizioni iniziali non nulle), mentre $p_i^{(l)}(t)$ indica la soluzione relativa alle vibrazioni forzate (derivante dall'effetto della forzante). A seconda del livello di smorzamento tali soluzioni assumono, come è noto, forme differenti: