Vibrazioni di sistemi a più gradi di libertà con forzante armonica

1 Vibrazioni a regime con forzante armonica

In questo paragrafo viene analizzato il comportamento a regime (cioè a transitorio esaurito) di un sistema vibrante a n gradi di libertà soggetto all'azione di una o più forzanti variabili nel tempo con legge armonica. Nel caso siano presenti più azioni eccitatrici, la presente trattazione può essere applicata solo nel caso in cui la pulsazione di tali forzanti sia la stessa; non vi sono invece limitazioni per quanto riguarda gli sfasamenti e le intensità massime delle forze, che possono risultare differenti per ciascuna azione eccitatrice.

Per motivi di chiarezza la trattazione, pur essendo valida per un generico sistema lineare a molti gradi di libertà, viene qui applicata al semplice sistema a due gradi di libertà rappresentato schematicamente in Figura 1.

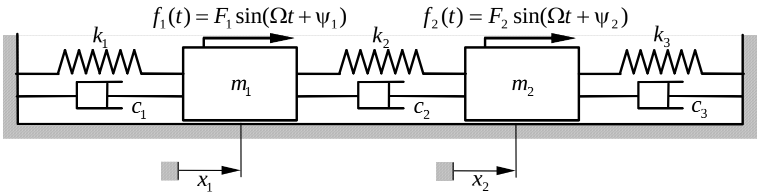

Figura 1: Sistema a due gradi di libertà con forzanti sinusoidali.

Sulle masse agiscono due forze $f_1(t)$ e $f_2(t)$ variabili nel tempo con legge sinusoidale a pulsazione Ω e pertanto esprimibili mediante le relazioni:

$$f_1(t) = F_1 \sin(\Omega t + \psi_1) \qquad f_2(t) = F_2 \sin(\Omega t + \psi_2) \tag{1}$$

in cui i simboli F_1 e F_2 indicano le intensità massime delle forze, mentre i simboli ψ_1 e ψ_2 indicano due opportuni angoli di fase.

Siano x_1 e x_2 gli spostamenti delle due masse, assunti positivi come in Figura 1; con tali convenzioni di segno le equazioni differenziali di moto per il sistema in esame risultano:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = f_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3x_2 = f_2(t) \end{cases} \tag{2}$$

Utilizzando la notazione matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \tag{3}$$

La vibrazione delle due masse in condizioni di regime sarà ancora di tipo sinusoidale ed avrà la stessa pulsazione delle azioni forzanti; pertanto possiamo scrivere:

$$x_1(t) = X_1 \sin(\Omega t + \varphi_1) \qquad x_2(t) = X_2 \sin(\Omega t + \varphi_2) \tag{4}$$

espressioni in cui le ampiezze X_1 e X_2 e le fasi φ_1 e φ_2 rappresentano grandezze da calcolare.

Per determinare le ampiezze e gli sfasamenti suddetti conviene procedere utilizzando il metodo dei numeri complessi, già utilizzato per lo studio delle vibrazioni ad un grado di libertà. A tale scopo riscriviamo con notazione complessa tutte le grandezze variabili con legge armonica (il trattino indica una grandezza complessa):

$$\begin{aligned} \overline{x}_1(t) &= X_1 e^{i(\Omega t + \varphi_1)} = \overline{X}_1 e^{i\Omega t} \qquad \text{con} \quad \overline{X}_1 = X_1 e^{i\varphi_1} \\ \overline{x}_2(t) &= X_2 e^{i(\Omega t + \varphi_2)} = \overline{X}_2 e^{i\Omega t} \qquad \text{con} \quad \overline{X}_2 = X_2 e^{i\varphi_2} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{array}{ll} \overline{f}_1(t) = F_1 e^{i(\Omega t+\psi_1)} = \overline{F}_1 e^{i\Omega t} & \text{con} \quad \overline{F}_1 = F_1 e^{i\psi_1} \\ \overline{f}_2(t) = F_2 e^{i(\Omega t+\psi_2)} = \overline{F}_2 e^{i\Omega t} & \text{con} \quad \overline{F}_2 = F_2 e^{i\psi_2} \end{array} \tag{6}$$

Pertanto le equazioni di moto (3), riscritte in termini di grandezze complesse, assumono la forma:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\overline{x}}_1 \\ \ddot{\overline{x}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\overline{x}}_1 \\ \dot{\overline{x}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{F}_1 \\ \overline{F}_2 \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} \tag{7}$$

Calcolando le derivate temporali delle funzioni complesse $\overline{x}_1(t)$ e $\overline{x}_2(t)$ e semplificando il termine $e^{i\Omega t}$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Omega^2\overline{X}_1 \\ -\Omega^2\overline{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i\Omega\overline{X}_1 \\ i\Omega\overline{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{F}_1 \\ \overline{F}_2 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Infine, raccogliendo i termini $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$, si ricava il seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2) - \Omega^2 m_1 + i\Omega(c_1+c_2) & -(k_2+i\Omega c_2) \\ -(k_2+i\Omega c_2) & (k_2+k_3) - \Omega^2 m_2 + i\Omega(c_2+c_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{F}_1 \\ \overline{F}_2 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Ponendo ora:

$$\overline{\mathbf{Z}}(i\Omega) = \begin{bmatrix} (k_1+k_2) - \Omega^2 m_1 + i\Omega(c_1+c_2) & -(k_2+i\Omega c_2) \\ -(k_2+i\Omega c_2) & (k_2+k_3) - \Omega^2 m_2 + i\Omega(c_2+c_3) \end{bmatrix} \tag{10}$$

la soluzione del sistema (9) risulta:

$$\begin{Bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{Bmatrix} = \overline{\mathbf{Z}}(i\Omega)^{-1} \begin{Bmatrix} \overline{F}_1 \\ \overline{F}_2 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

La matrice $\overline{\mathbf{Z}}$ viene detta *matrice di impedenza* del sistema vibrante.

Giunti a questo punto, per determinare le ampiezze X_1 e X_2 e gli sfasamenti φ_1 e φ_2 nel moto a regime delle due masse, è sufficiente calcolare il modulo e l'argomento delle quantità complesse $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$; si avrà pertanto:

$$X_1 = |\overline{X}_1| \quad \varphi_1 = \arg(\overline{X}_1) \qquad\qquad X_2 = |\overline{X}_2| \quad \varphi_2 = \arg(\overline{X}_2) \tag{12}$$

Come si è detto all'inizio del paragrafo, la presente trattazione è valida anche per un generico sistema lineare ad n gradi di libertà, soggetto ad azioni forzanti di tipo armonico aventi tutte la medesima pulsazione Ω. In questo caso, indicate rispettivamente con $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{C}$ le matrici di massa, di rigidezza e di smorzamento del sistema, la matrice di impedenza (di dimensione $n \times n$) è definita dalla seguente espressione:

$$\overline{\mathbf{Z}}(i\Omega) = \mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M} + i\Omega\mathbf{C} \tag{13}$$

e quindi il suo generico elemento $\overline{z}_{rs}$ si potrà calcolare mediante la relazione:

$$\overline{z}_{rs}(i\Omega) = k_{rs} - \Omega^2 m_{rs} + i\Omega c_{rs} \qquad r,s = 1,2,\ldots,n \tag{14}$$

in cui m_{rs}, k_{rs} e c_{rs} indicano i generici elementi delle matrici $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{C}$.

Definendo ora il vettore delle ampiezze complesse:

$$\overline{\mathbf{X}} = \{\overline{X}_1\ \overline{X}_2\ \ldots\ \overline{X}_n\}^T \qquad \text{con} \quad \overline{X}_k = X_k e^{i\varphi_k} \qquad k = 1,2,\ldots,n \tag{15}$$

e il vettore delle forzanti complesse:

$$\overline{\mathbf{F}} = \{\overline{F}_1\ \overline{F}_2\ \ldots\ \overline{F}_n\}^T \qquad \text{con} \quad \overline{F}_k = F_k e^{i\psi_k} \qquad k = 1,2,\ldots,n \tag{16}$$

la (11) si può riscrivere nella forma:

$$\overline{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{Z}}(i\Omega)^{-1}\overline{\mathbf{F}} \tag{17}$$

Le ampiezze effettive e i corrispondenti sfasamenti risulteranno allora:

$$X_k = |\overline{X}_k| \quad \varphi_k = \arg(\overline{X}_k) \qquad k = 1,2,\ldots,n \tag{18}$$

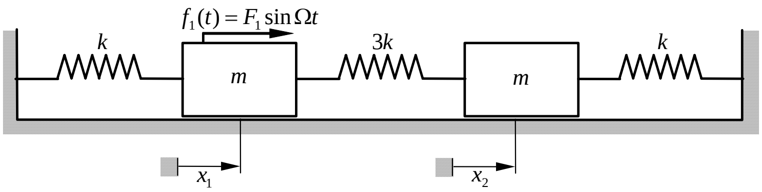

Figura 2: Sistema a due gradi di libertà non smorzato con forzante armonica.

Esempio 1

Determinare il moto a regime del sistema rappresentato in Figura 2.

Dati

- Masse .... $m_1 = m_2 = m$
- Rigidezze delle molle di estremità .... $k_1 = k_3 = k$
- Rigidezza della molla centrale .... $k_2 = 3k$
- Forza applicata alla massa sinistra .... $f_1(t) = F_1 \sin \Omega t$

Soluzione

Le equazioni di moto per il sistema in esame possono essere espresse nella forma:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & -3k \\ -3k & 4k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \sin \Omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.1}$$

A regime la soluzione sarà del tipo:

$$x_1(t) = X_1 \sin \Omega t \qquad x_2(t) = X_2 \sin \Omega t \tag{E.2}$$

in cui le ampiezze di vibrazione X_1 e X_2 devono essere considerate con il proprio segno.[1] Per calcolare X_1 e X_2 occorre risolvere il sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} 4k - \Omega^2 m & -3k \\ -3k & 4k - \Omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.3}$$

che si ottiene immediatamente dal sistema (9), sostituendo in esso i dati del nostro problema e considerando nulle le costanti di smorzamento. La soluzione del sistema per via simbolica si può facilmente ottenere mediante la regola di Cramer (per evitare di dover calcolare l'inversa della matrice di impedenza) e risulta:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\begin{vmatrix} F_1 & -3k \\ 0 & 4k - \Omega^2 m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4k - \Omega^2 m & -3k \\ -3k & 4k - \Omega^2 m \end{vmatrix}} = \frac{F_1(4k - \Omega^2 m)}{(4k - \Omega^2 m)^2 - 9k^2} = \frac{F_1(4k - \Omega^2 m)}{(7k - m\Omega^2)(k - m\Omega^2)} \\ X_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 4k - \Omega^2 m & F_1 \\ -3k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4k - \Omega^2 m & -3k \\ -3k & 4k - \Omega^2 m \end{vmatrix}} = \frac{3kF_1}{(4k - \Omega^2 m)^2 - 9k^2} = \frac{3kF_1}{(7k - m\Omega^2)(k - m\Omega^2)} \end{aligned} \tag{E.4}$$

Osserviamo che per $\Omega = \omega_1 = \sqrt{k/m}$ e per $\Omega = \omega_2 = \sqrt{7k/m}$ il denominatore delle espressioni [E.4] si annulla e quindi le ampiezze X_1 e X_2 tendono all'infinito (condizione di risonanza); pertanto ω_1 e ω_2 sono le pulsazioni proprie del sistema vibrante.

Con alcuni passaggi algebrici e ponendo $r = \Omega/\omega_1$ le ampiezze di vibrazione a regime possono essere riscritte nella forma seguente:

[1] Quando lo smorzamento è nullo ed è presente un'unica azione forzante (oppure più azioni forzanti in fase o in controfase fra loro), è possibile effettuare i calcoli senza ricorrere all'uso di quantità complesse. L'eventuale valore negativo di una delle ampiezze di oscillazione deve essere interpretato come un moto armonico in controfase della corrispondente coordinata libera. Per questo motivo è inutile introdurre gli sfasamenti φ_k indicati nella (18), poiché, nelle condizioni suddette, essi risulterebbero sempre uguali a zero o a π radianti.

$$X_1 = \frac{F_1}{k}\frac{4-r^2}{(7-r^2)(1-r^2)}$$
$$X_2 = \frac{F_1}{k}\frac{3}{(7-r^2)(1-r^2)} \qquad \text{[E.5]}$$

I grafici delle due funzioni [E.5] sono rappresentati in Figura 3 in funzione del parametro adimensionale r; la condizione di risonanza si ha per $r = 1$ e per $r = \sqrt{7} = 2.646$. Si può osservare che per $r = 2$ (ovvero per $\Omega = 2\sqrt{k/m}$) si annulla l'ampiezza X_1 della massa su cui agisce la forzante. In queste condizioni il sistema funziona come assorbitore dinamico di vibrazioni: ciò significa che, a questa particolare frequenza, il movimento della massa destra è tale da generare sulla molla centrale, ad ogni istante di tempo, una forza elastica uguale e contraria alla forzante $F(t)$. Di conseguenza la massa sinistra rimane sempre ferma mentre la massa destra si mantiene in vibrazione alla frequenza suddetta.

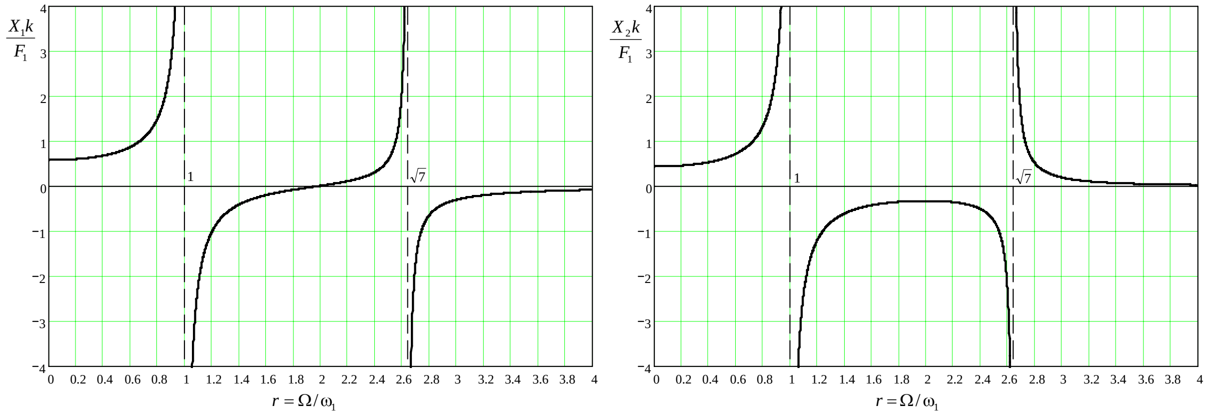

Figura 3: Ampiezze di oscillazione X_1 e X_2 in funzione del parametro $r = \Omega/\omega_1$ (curve di risposta in frequenza).

Esempio 2

Determinare il moto a regime del sistema smorzato rappresentato in Figura 4, sottoposto all'azione di due forzanti $f_1(t) = F_1 \sin\Omega t$ e $f_2(t) = F_2 \sin(\Omega t + \alpha)$.

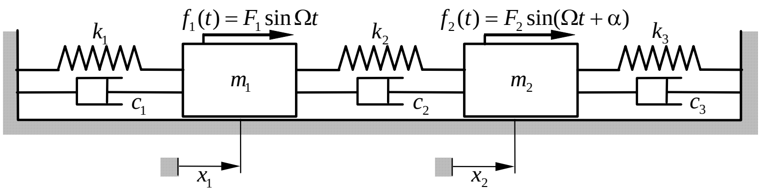

Figura 4: Sistema a due gradi di libertà smorzato con forzanti armoniche sfasate.

Dati

- Masse .... $m_1 = 4$ kg $\quad m_2 = 6$ kg
- Rigidezze .... $k_1 = 1500$ N/m $\quad k_2 = 2000$ N/m $\quad k_3 = 3000$ N/m
- Costanti di smorzamento .... $c_1 = 25$ Ns/m $\quad c_2 = 10$ Ns/m $\quad c_3 = 15$ Ns/m
- Intensità massima della forza $f_1(t)$ .... $F_1 = 100$ N
- Intensità massima della forza $f_2(t)$ .... $F_2 = 80$ N
- Sfasamento fra le forzanti .... $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ rad
- Pulsazione delle forzanti .... $\Omega = 15$ rad/s

Soluzione

Le equazioni di moto per il sistema in esame assumono la forma seguente:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \sin\Omega t \\ F_2 \sin(\Omega t + \alpha) \end{Bmatrix} \qquad \text{[E.1]}$$

Sostituendo nella [E.1] i valori numerici si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 35 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3500 & -2000 \\ -2000 & 5000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \sin 15t \\ 80 \sin(15t + \frac{2}{3}\pi) \end{Bmatrix} \quad \text{[E.2]}$$

La soluzione in condizioni di regime è:

$$x_1(t) = X_1 \sin(\Omega t + \varphi_1) \qquad x_2(t) = X_2 \sin(\Omega t + \varphi_2) \quad \text{[E.3]}$$

dove X_1 e X_2 sono le ampiezze di oscillazione delle due masse e φ_1 e φ_2 i corrispondenti sfasamenti.

Procediamo nella soluzione calcolando la matrice di impedenza $\overline{\mathbf{Z}}$ e il vettore delle forzanti complesse $\overline{\mathbf{F}}$; in base alla (13) si ha:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{Z}} &= \mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C} \\ &= \begin{bmatrix} 3500 & -2000 \\ -2000 & 5000 \end{bmatrix} - 15^2 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + 15i \begin{bmatrix} 35 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2600 + 525i & -2000 - 150i \\ -2000 - 150i & 3650 + 375i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{[E.4]}$$

Tenendo presente che gli sfasamenti delle forzanti sono $\psi_1 = 0$ e $\psi_2 = \alpha = \frac{2}{3}\pi$ rad, il vettore delle forzanti complesse risulta:

$$\overline{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \overline{F}_1 \\ \overline{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 e^{i\psi_1} \\ F_2 e^{i\psi_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 80\, e^{i\frac{2}{3}\pi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ -40 + 69.282i \end{Bmatrix} \quad \text{[E.5]}$$

Il vettore delle ampiezze complesse $\overline{\mathbf{X}} = \{\overline{X}_1 \ \overline{X}_2\}^T$ è soluzione del sistema:

$$\overline{\mathbf{Z}}\,\overline{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{F}} \quad \text{[E.6]}$$

che, in base ai valori numerici assegnati, assume la forma:

$$\begin{bmatrix} 2600 + 525i & -2000 - 150i \\ -2000 - 150i & 3650 + 375i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ -40 + 69.282i \end{Bmatrix} \quad \text{[E.7]}$$

Come nell'esempio precedente, il sistema può essere risolto con la regola di Cramer, fornendo i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \overline{X}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 100 & -2000 - 150i \\ -40 + 69.282i & 3650 + 375i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2600 + 525i & -2000 - 150i \\ -2000 - 150i & 3650 + 375i \end{vmatrix}} = 0.0552 + 0.0082i \\ \overline{X}_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 2600 + 525i & 100 \\ -2000 - 150i & -40 + 69.282i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2600 + 525i & -2000 - 150i \\ -2000 - 150i & 3650 + 375i \end{vmatrix}} = 0.02137 + 0.02355i \end{aligned} \quad \text{[E.8]}$$

Calcolando il modulo e l'argomento delle ampiezze complesse si ottengono i valori effettivi delle ampiezze di vibrazione ed i corrispondenti sfasamenti:

$$\begin{aligned} X_1 &= |\overline{X}_1| = |0.0552 + 0.0082i| = 0.056 \text{ m} = 56 \text{ mm} \\ \varphi_1 &= \arg(\overline{X}_1) = \arg(0.0552 + 0.0082i) = 0.148 \text{ rad} \\ X_2 &= |\overline{X}_2| = |0.02137 + 0.02355i| = 0.032 \text{ m} = 32 \text{ mm} \\ \varphi_2 &= \arg(\overline{X}_2) = \arg(0.02137 + 0.02355i) = 0.834 \text{ rad} \end{aligned} \quad \text{[E.9]}$$

Se, nella [E.4] si lascia indicata la pulsazione Ω, senza sostituire il corrispondente valore numerico, la matrice di impedenza viene espressa in funzione di tale pulsazione; il risultato è il seguente:

$$\overline{\mathbf{Z}}(i\Omega) = \begin{bmatrix} (3500 - 4\Omega^2) + 35i\Omega & -2000 - 10i\Omega \\ -2000 - 10i\Omega & (5000 - 6\Omega^2) + 25i\Omega \end{bmatrix} \quad \text{[E.10]}$$

La soluzione del sistema [E.6] risulta quindi esprimibile nella forma:

$$\begin{Bmatrix} \overline{X}_1(\Omega) \\ \overline{X}_2(\Omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (3500 - 4\Omega^2) + 35i\Omega & -2000 - 10i\Omega \\ -2000 - 10i\Omega & (5000 - 6\Omega^2) + 25i\Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 100 \\ -40 + 69.282i \end{Bmatrix} \quad \text{[E.11]}$$

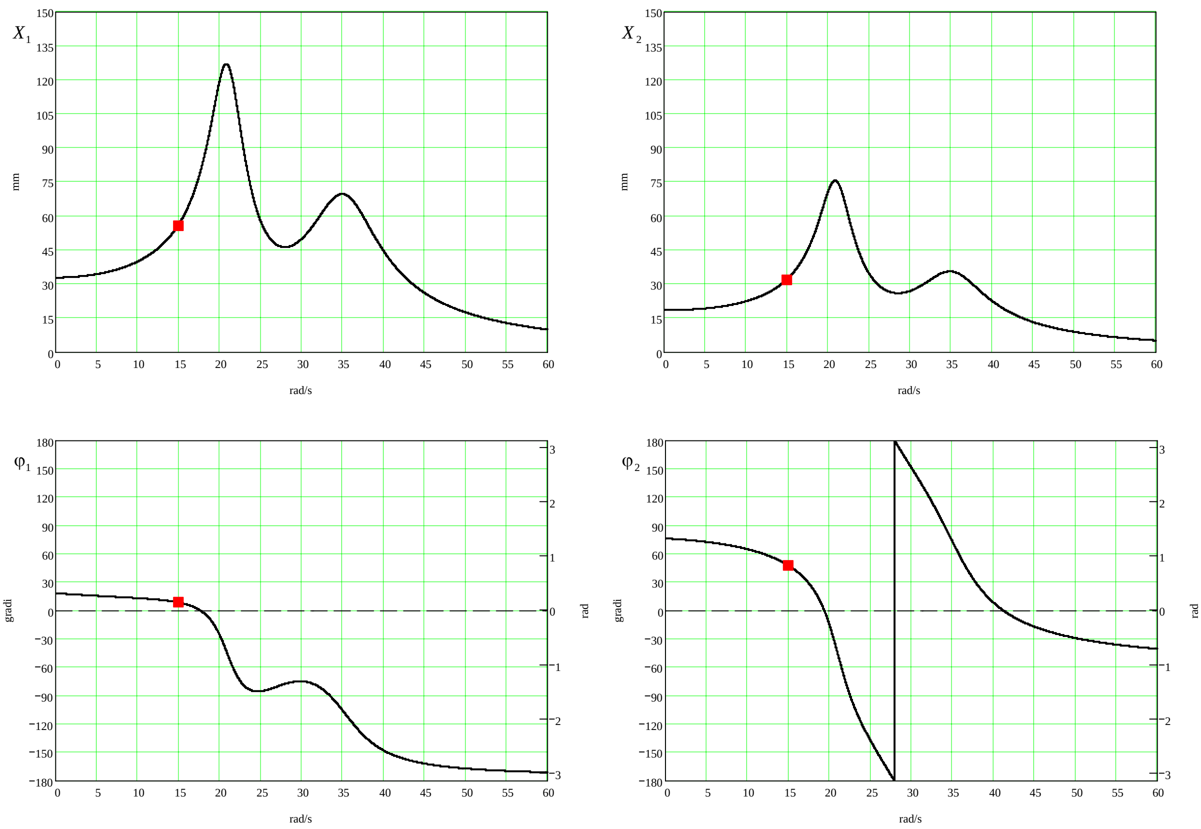

Figura 5: Ampiezze di oscillazione X_1 *e* X_2 *e corrispondenti sfasamenti* φ_1 *e* φ_2 *in funzione della pulsazione* Ω *(curve di risposta in frequenza). I riquadri indicano il punto di funzionamento del sistema vibrante per la pulsazione assegnata* $\Omega = 15$ rad/s.

Quindi le ampiezze effettive ed i corrispondenti sfasamenti si potranno determinare, in funzione di Ω, mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} X_1(\Omega) &= |\overline{X}_1(\Omega)| \qquad \varphi_1(\Omega) = \arg(\overline{X}_1(\Omega)) \\ X_2(\Omega) &= |\overline{X}_2(\Omega)| \qquad \varphi_2(\Omega) = \arg(\overline{X}_2(\Omega)) \end{aligned} \qquad \text{[E.12]}$$

Le relazioni [E.11] ed [E.12] possono essere implementate in un apposito programma di calcolo per ottenere i valori delle ampiezze e degli sfasamenti al variare di Ω. A titolo di esempio si mostrano in Figura 5 i risultati ottenuti per il sistema in esame facendo variare Ω nell'intervallo da 0 a 60 rad/s.