

Vibrazioni libere di sistemi a più gradi di libertà

1 Introduzione

In questo capitolo verrà presentata la teoria generale che consente di studiare la dinamica di sistemi vibranti lineari¹ a due o più gradi di libertà. La scrittura delle equazioni di moto di tali sistemi può essere effettuata mediante il metodo degli equilibri dinamici oppure mediante le equazioni di Lagrange. Il metodo degli equilibri dinamici richiede di isolare gli elementi dotati di massa presenti nel sistema e di ricavare per ciascuno di essi il diagramma di corpo libero. Al contrario il metodo basato sulle equazioni di Lagrange utilizza un approccio di tipo energetico e risulta più semplice da applicare, in quanto non richiede di separare i singoli elementi che costituiscono il sistema. Nel seguito della trattazione applicheremo i due metodi sopra citati per ricavare le equazioni di moto del sistema a due gradi di libertà² rappresentato schematicamente in Figura 1. Le coordinate libere del sistema sono gli spostamenti x_1 e x_2 delle due masse, assunti positivi verso destra e misurati a partire dalla posizione di equilibrio statico delle due masse; per semplicità supporremo che, nella posizione di equilibrio, tutte le molle siano scariche³.

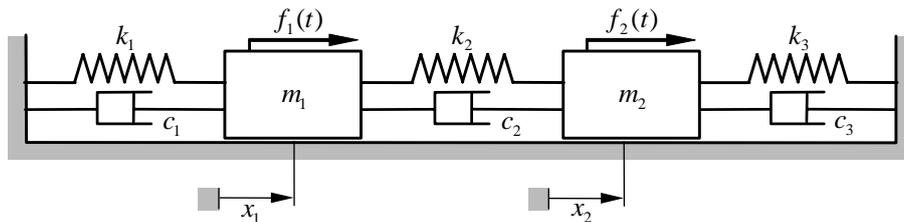


Figura 1: Sistema a due gradi di libertà.

2 Metodo degli equilibri dinamici

Come si è detto, per poter applicare il metodo degli equilibri dinamici occorre disegnare i diagrammi di corpo libero per tutte le masse in movimento; supponendo privo di attrito il piano di appoggio e considerando positivi verso destra gli spostamenti delle due masse, si ottengono le forze indicate in Figura 2. Per semplicità di rappresentazione sono state omesse le forze agenti in direzione verticale⁴.

Si osservi che la forza esercitata dalla molla centrale dipende dagli spostamenti di entrambe le masse, mentre le forze esercitate dalle molle laterali dipendono soltanto dallo spostamento della massa a cui sono collegate. In

¹Nel linguaggio corrente la parola *lineare* viene spesso usata con il significato di *rettilineo* o *traslatorio*; nel nostro caso, invece, il termine lineare deve essere inteso in senso matematico. Si parla infatti di *sistema lineare* quando la dinamica di tale sistema (a uno o più gradi di libertà) è descritta da una o più equazioni differenziali lineari. In questo senso, quindi, è lineare anche un sistema in cui la vibrazione è descritta da coordinate di posizione angolari.

²Si tenga presente che i metodi qui presentati sono di validità generale e possono essere applicati ad un generico sistema con n gradi di libertà in presenza o assenza di azioni smorzanti e di cause eccitatrici.

³Nel caso in cui le molle non siano scariche, le forze elastiche agiranno in modo tale da portare il sistema in una configurazione equilibrata che potrà essere assunta come riferimento per gli spostamenti delle due masse; ovviamente, nella posizione di equilibrio, la risultante delle forze agenti su ciascuna massa è nulla.

⁴Poiché il movimento delle due masse può avvenire solo in direzione orizzontale, le forze che intervengono nello studio dinamico del sistema sono soltanto quelle agenti orizzontalmente; lungo la direzione verticale agiscono le forze peso delle due masse, che risultano equilibrate dalle reazioni del piano di appoggio.

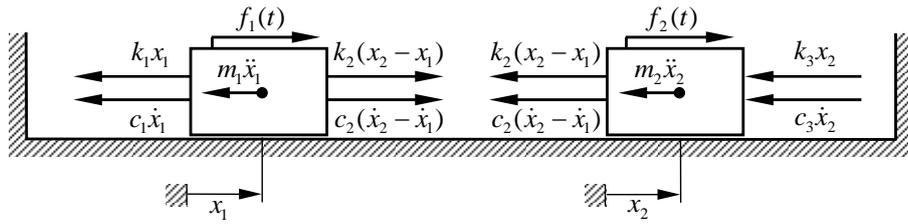


Figura 2: Diagrammi di corpo libero per il sistema a due gradi di libertà di Figura 1.

modo analogo la forza dello smorzatore centrale è funzione delle velocità di entrambe le masse, mentre le forze degli smorzatori laterali dipendono unicamente dalla velocità della massa a cui sono collegati.

Durante il tracciamento dei diagrammi di corpo libero occorre prestare molta attenzione ai versi con i quali vengono disegnate le forze, poiché tali versi devono essere conformi alle convenzioni di segno utilizzate per gli spostamenti. Imponendo ora per ciascuna massa la condizione di equilibrio dinamico, si ottiene:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) - f_1(t) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3x_2 - f_2(t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Riordinando i vari termini si perviene al seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = f_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

3 Metodo delle equazioni di Lagrange

Le equazioni di Lagrange per il sistema in Figura 1 sono esprimibili nella forma seguente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\delta L_F}{\delta x_i} \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

dove T e V sono rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema, \mathcal{R} indica la *funzione di dissipazione di Rayleigh* ed L_F rappresenta il lavoro compiuto dalle forzanti esterne. La funzione di dissipazione viene appositamente introdotta per tener conto delle dissipazioni energetiche in modo semplice ed immediato (si veda a questo proposito quanto si è detto in precedenza per i sistemi ad un solo grado di libertà).

Con le convenzioni di segno adottate in precedenza, l'energia cinetica e l'energia potenziale assumono le seguenti espressioni:

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) \quad V = \frac{1}{2}[k_1x_1^2 + k_2(x_1 - x_2)^2 + k_3x_2^2] \quad (4)$$

La funzione di dissipazione viene calcolata sommando i contributi dei tre smorzatori e tenendo presente che, per lo smorzatore centrale, occorre considerare la velocità relativa con cui un estremo dello smorzatore si muove rispetto all'altro estremo (si considera quindi la differenza delle due velocità $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$); si ha pertanto:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}[c_1\dot{x}_1^2 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + c_3\dot{x}_2^2] \quad (5)$$

Il lavoro elementare compiuto dalle forzanti esterne vale:

$$\delta L_F = f_1(t)\delta x_1 + f_2(t)\delta x_2 \quad (6)$$

Poiché l'energia cinetica dipende soltanto dalle velocità delle due masse e non dai loro spostamenti, si deduce immediatamente che $\partial T / \partial x_i = 0$ per $i = 1, 2$. Il calcolo degli altri termini presenti nella (3) fornisce i seguenti

risultati:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) &= m_1 \ddot{x}_1 & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) &= m_2 \ddot{x}_2 \\
\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{x}_1} &= (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{x}_2} &= -c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 \\
\frac{\partial V}{\partial x_1} &= (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 & \frac{\partial V}{\partial x_2} &= -k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 \\
\frac{\delta L_F}{\delta x_1} &= f_1(t) & \frac{\delta L_F}{\delta x_2} &= f_2(t)
\end{aligned} \tag{7}$$

Sostituendo nelle equazioni di Lagrange (3) le espressioni delle derivate sopra calcolate si ottengono di nuovo le equazioni di moto (2).

Come si è visto, il metodo basato sulle equazioni di Lagrange consente di scrivere rapidamente le equazioni di moto di un sistema meccanico senza ricorrere ai diagrammi di corpo libero. Si consiglia quindi di utilizzarlo frequentemente, in particolare per lo studio di sistemi complessi, per i quali il metodo degli equilibri dinamici, sebbene pur sempre applicabile, non fornisce un approccio efficiente per la determinazione delle equazioni di moto.

4 Equazioni di moto in forma matriciale

Le equazioni di moto che abbiamo ricavato costituiscono un sistema di due equazioni differenziali accoppiate. Infatti la prima delle due equazioni (2) contiene i termini $-k_2 x_2$ e $-c_2 \dot{x}_2$, dipendenti dalla posizione e dalla velocità della seconda massa, mentre la seconda equazione contiene i termini $-k_2 x_1$ e $-c_2 \dot{x}_1$ dipendenti dalla posizione e dalla velocità della prima massa; ciò significa che il movimento della massa m_1 influenza il movimento della massa m_2 e viceversa.

La cosa è facilmente comprensibile se si pensa che le due masse sono collegate dalla molla e dallo smorzatore centrali, aventi rispettivamente rigidità k_2 e costante di smorzamento c_2 : togliendo la molla e lo smorzatore (ovvero ponendo $k_2 = 0$ e $c_2 = 0$) le due masse risultano fra di loro separate ed i loro movimenti diventano indipendenti. Dal punto di vista matematico si ottengono due equazioni disaccoppiate, in ciascuna delle quali è presente una sola coordinata: quindi, da un sistema a due gradi di libertà si passa a due sistemi indipendenti ad un solo grado di libertà.

Per tutti i sistemi a più gradi di libertà è possibile scrivere le equazioni di moto in formato matriciale. L'utilizzo delle matrici si rivela molto utile, soprattutto per sistemi con numerosi gradi di libertà, in quanto rende più "compatta" la scrittura delle equazioni e semplifica la trattazione matematica del problema.

Si tenga inoltre presente che, qualora si debba realizzare un programma di calcolo per lo studio di un problema a più gradi di libertà, l'adozione del formalismo matriciale può aiutare il programmatore nella stesura del codice di calcolo.

La scrittura matriciale delle (2) è la seguente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \tag{8}$$

dove \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} sono chiamate rispettivamente *matrice di massa*, *matrice di smorzamento* e *matrice di rigidità* e sono definite dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Il simbolo \mathbf{x} indica il vettore degli spostamenti, le cui componenti sono appunto le coordinate di posizione x_1 e x_2 delle due masse; poiché tale vettore è funzione del tempo, possiamo scrivere:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \tag{10}$$

Chiaramente, i vettori $\dot{\mathbf{x}}$ e $\ddot{\mathbf{x}}$ avranno come componenti le velocità e le accelerazioni delle due masse.

Al secondo membro della (8) troviamo il vettore delle forzanti \mathbf{F} , che contiene le espressioni analitiche delle forze agenti sul sistema; poiché tali forze vengono solitamente definite in funzione del tempo si ha:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Ovviamente, nel caso in cui si stia affrontando un problema di vibrazioni libere, si avrà $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, dove il simbolo $\mathbf{0}$ indica il vettore nullo.

Possiamo subito osservare che le matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} sono matrici simmetriche 2×2 , i cui elementi dipendono dai parametri di massa e di rigidità del sistema. Nel caso più generale di sistema ad n gradi di libertà si otterrebbero matrici $n \times n$ ed il vettore degli spostamenti risulterebbe un vettore colonna di dimensione n .

La simmetria delle matrici è una proprietà importante dei sistemi a molti gradi di libertà; in generale si può affermare che lo studio dinamico di un sistema lineare a più gradi di libertà è sempre riconducibile ad sistema di equazioni differenziali le cui matrici caratteristiche sono simmetriche.

Se si utilizza il metodo di Lagrange per ricavare le equazioni di moto, le matrici risultano sempre simmetriche; al contrario, se si utilizza il metodo degli equilibri dinamici, la simmetria delle matrici non è sempre garantita. Tuttavia, se le matrici ottenute non risultano simmetriche, è sempre possibile effettuare qualche manipolazione algebrica che permette di ottenere la simmetria.

Osservando le matrici (9) si può immediatamente determinare il tipo di accoppiamento presente nel sistema. Nel caso in esame l'accoppiamento è dovuto ai termini di tipo elastico e smorzante, in quanto le matrici \mathbf{K} e \mathbf{C} non sono diagonali, mentre risulta diagonale la matrice di massa \mathbf{M} . Come già detto, ponendo $k_2 = 0$ e $c_2 = 0$ il sistema vibrante viene completamente disaccoppiato e le matrici di rigidità e di smorzamento diventano diagonali.

Nei paragrafi successivi torneremo sul problema dell'accoppiamento delle coordinate, mostrando che il tipo di accoppiamento dipende dalle variabili di posizione utilizzate.

Vedremo infine che, se sono soddisfatte alcune condizioni, è possibile individuare un particolare insieme di coordinate, dette *coordinate principali*, che permettono di disaccoppiare completamente le equazioni di moto del sistema.

5 Vibrazioni libere in assenza di smorzamento

Per studiare le vibrazioni libere in assenza di smorzamento consideriamo il sistema vibrante rappresentato in Figura 3, in cui sono stati eliminati gli smorzatori e le azioni forzanti.

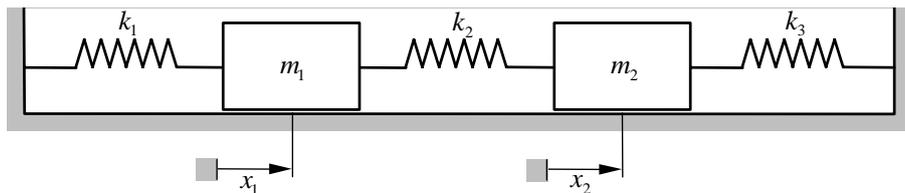


Figura 3: Sistema vibrante a due gradi di libertà privo di smorzamento e di azioni forzanti.

Le equazioni di moto si ottengono immediatamente dalle (2) ponendo $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ed annullando le forze al secondo membro; il risultato è il seguente:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

In forma matriciale si avrà:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (13)$$

La soluzione delle equazioni di moto è data dalle due funzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$ che definiscono l'andamento nel tempo degli spostamenti delle due masse; tale soluzione si può determinare attraverso il calcolo dei cosiddetti *modi principali di vibrare* del sistema.

Il concetto di *modo principale di vibrare* è fondamentale nella Teoria delle Vibrazioni; tale concetto, infatti, viene frequentemente richiamato nello studio dei sistemi vibranti a più gradi di libertà e per questo motivo

occorre darne fin d'ora una definizione rigorosa. Definiamo allora *modo principale di vibrare* una particolare vibrazione che soddisfa i seguenti requisiti:

- 1) tutte le masse vibrano con moto armonico;
- 2) la pulsazione (o frequenza) della vibrazione è la stessa per tutte le masse (moto sincrono);
- 3) il passaggio per la posizione di equilibrio avviene simultaneamente per tutte le masse⁵.

Le tre proprietà caratteristiche del modo principale di vibrare si possono tradurre matematicamente tramite le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 \sin(\omega t + \alpha) \\ x_2(t) = X_2 \sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \quad (14)$$

La prima proprietà è soddisfatta in quanto per entrambe le coordinate viene utilizzata la funzione *seno*, che indica la presenza di un moto armonico (ovviamente si può usare anche la funzione *coseno*); la proprietà di moto sincrono è garantita dalla medesima pulsazione ω per le due sinusoidi; infine, il passaggio simultaneo per la posizione di equilibrio viene ottenuto indicando lo stesso sfasamento α per i due moti armonici.

Si osservi che le ampiezze dei due moti armonici sono in generale diverse e pertanto vengono indicate con i simboli X_1 e X_2 ; potrebbe anche verificarsi che una delle due ampiezze sia negativa: in tal caso la corrispondente coordinata vibra in controfase rispetto all'altra, ma rimane comunque soddisfatta la terza proprietà del modo principale di vibrare, in quanto si ha sempre il passaggio simultaneo per la posizione di equilibrio.

Supponiamo ora che sia possibile ottenere per il nostro sistema una vibrazione di questo tipo e poniamoci il problema di determinare la pulsazione ω della vibrazione e le corrispondenti ampiezze X_1 e X_2 . Procediamo quindi sostituendo le (14) e le loro derivate seconde nelle equazioni di moto (2); dopo alcuni passaggi algebrici, si ottiene:

$$\begin{cases} \{(k_1 + k_2) - \omega^2 m_1\} X_1 - k_2 X_2 = 0 \\ -k_2 X_1 + \{(k_2 + k_3) - \omega^2 m_2\} X_2 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Poiché il sistema di equazioni (15) deve essere soddisfatto per qualsiasi valore del tempo t , devono risultare nulli i termini fra parentesi graffe, che costituiscono i coefficienti moltiplicativi delle due funzioni sinusoidali; si ha pertanto:

$$\begin{cases} [(k_1 + k_2) - \omega^2 m_1] X_1 - k_2 X_2 = 0 \\ -k_2 X_1 + [(k_2 + k_3) - \omega^2 m_2] X_2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Si osservi che il sistema (16), può essere riscritto, con notazione matriciale, nella forma:

$$\mathbf{\Delta}(\omega) \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (17)$$

dove $\mathbf{X} = \{X_1 \ X_2\}^T$ e $\mathbf{\Delta}(\omega)$ è definita dalla seguente espressione:

$$\mathbf{\Delta}(\omega) = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

La (17) è di validità generale e pertanto può essere scritta per qualsiasi sistema vibrante a n gradi di libertà (purché lineare).

Abbiamo così ottenuto un sistema lineare omogeneo costituito da due equazioni algebriche nelle due incognite X_1 e X_2 ; la soluzione banale di tale sistema è $X_1 = X_2 = 0$, soluzione che ovviamente appare priva di interesse, in quanto annulla completamente le vibrazioni del sistema. Per ottenere una soluzione non banale occorre uguagliare a zero il determinante della matrice $\mathbf{\Delta}(\omega)$; si ha pertanto:

$$\det \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

Sviluppando il determinante si ottiene la seguente equazione biquadratica, detta *equazione caratteristica* o *equazione delle frequenze*:

$$a\omega^4 + b\omega^2 + c = 0 \quad (20)$$

in cui

$$a = m_1 m_2 \quad b = -[(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1] \quad c = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 \quad (21)$$

⁵Ciò significa che le vibrazioni devono avvenire *in fase* o *in controfase*.

Risolviamo la (20) ponendo $\omega^2 = \gamma$, per ricondurci ad un'equazione di secondo grado; si ottiene pertanto:

$$\gamma_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (22)$$

Le due soluzioni γ_1 e γ_2 sono sempre positive, indipendentemente dai valori assunti dai parametri di massa e di rigidità del sistema⁶. Considerando ora le sole radici positive⁷ della (20) si ha:

$$\omega_1 = \sqrt{\gamma_1} \quad \omega_2 = \sqrt{\gamma_2} \quad (23)$$

Le pulsazioni fornite dalla (23) sono le *pulsazioni proprie* del sistema vibrante e, per come sono state calcolate, rappresentano le pulsazioni alle quali si ottengono i modi principali di vibrare. Possiamo quindi affermare che ogni pulsazione propria corrisponde ad un modo principale di vibrare del sistema, e che ogni modo principale di vibrare può avvenire solo alla pulsazione propria corrispondente.

Giunti a questo punto, rimangono da calcolare le ampiezze di oscillazione X_1 e X_2 , i cui valori dipendono dalle pulsazioni proprie del sistema vibrante. Indicheremo con il simbolo $X_1^{(i)}$ e $X_2^{(i)}$ le ampiezze di oscillazione corrispondenti alla pulsazione propria ω_i .

Poiché il sistema lineare (16) ha la matrice dei coefficienti con determinante nullo, le due equazioni che lo costituiscono sono linearmente dipendenti: ciò significa che è possibile calcolare soltanto il rapporto fra le ampiezze di oscillazione. Ponendo $r_i = X_1^{(i)}/X_2^{(i)}$, il sistema (16) fornisce i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{X_1^{(1)}}{X_2^{(1)}} = \frac{k_2}{(k_1 + k_2) - \omega_1^2 m_1} = \frac{(k_2 + k_3) - \omega_1^2 m_2}{k_2} \\ r_2 &= \frac{X_1^{(2)}}{X_2^{(2)}} = \frac{k_2}{(k_1 + k_2) - \omega_2^2 m_1} = \frac{(k_2 + k_3) - \omega_2^2 m_2}{k_2} \end{aligned} \quad (24)$$

Si osservi che i rapporti r_i ($i = 1, 2$) possono essere ricavati utilizzando indifferentemente la prima o la seconda delle equazioni del sistema (16): questo fatto deriva ovviamente dall'aver imposto l'annullarsi del determinante.

Le ampiezze di vibrazione ricavate per ciascun modo principale di vibrare vengono solitamente inserite all'interno di opportuni vettori denominati *vettori modali*; per il caso in esame si ha:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 X_2^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 X_2^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Dalla trattazione svolta appare evidente che le ampiezze di vibrazione dei modi principali di vibrare sono calcolabili a meno di una costante; ciò che caratterizza un modo principale di vibrare è quindi il rapporto fra tali ampiezze, il cui valore dipende esclusivamente dai parametri di massa e di rigidità del sistema. Per semplificare la scrittura dei vettori modali, possiamo quindi porre una qualsiasi delle ampiezze uguale ad uno; ad esempio, se poniamo $X_2^{(1)} = 1$ e $X_2^{(2)} = 1$ si ottiene:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} r_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

A questo punto possiamo fornire l'espressione completa dei due modi principali di vibrare; ricordando la (14) si ottiene per il primo modo principale:

$$\begin{cases} x_1^{(1)}(t) = X_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ x_2^{(1)}(t) = X_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \end{cases} \quad \text{con} \quad \frac{X_1^{(1)}}{X_2^{(1)}} = r_1 \quad (27)$$

⁶Per convincersi di questo fatto basta osservare il segno dei coefficienti A , B e C : in base alla (21) si ha $A > 0$, $B < 0$ e $C > 0$, poiché tutti i parametri di massa (m_1 , m_2) e di rigidità (k_1 , k_2 , k_3) sono costanti positive. Passando dal coefficiente A al coefficiente B si presenta una variazione di segno (da $+$ a $-$); allo stesso modo, passando dal coefficiente B al coefficiente C si presenta un'altra variazione di segno (da $-$ a $+$). Ricordando ora la nota regola di Cartesio (per la quale ogni variazione di segno nei coefficienti corrisponde ad una radice positiva mentre ogni permanenza di segno corrisponde ad una radice negativa), si può dedurre che entrambe le soluzioni γ_1 e γ_2 sono sempre positive.

⁷Dal punto di vista algebrico la (20) ammette quattro soluzioni: ($\pm\sqrt{\gamma_1}$ e $\pm\sqrt{\gamma_2}$), tutte reali, in quanto γ_1 e γ_2 sono sempre positive. Tuttavia le radici negative non hanno significato fisico: si ricordi infatti che la pulsazione ω è una grandezza intrinsecamente positiva, in quanto si tratta di una frequenza (misurata in rad/s anziché in Hz).

e per il secondo modo principale:

$$\begin{cases} x_1^{(2)}(t) = X_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ x_2^{(2)}(t) = X_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad \text{con} \quad \frac{X_1^{(2)}}{X_2^{(2)}} = r_2 \quad (28)$$

Per calcolare i valori effettivi delle ampiezze di oscillazione ed i valori degli sfasamenti α_1 e α_2 occorrerà utilizzare le condizioni iniziali. Il procedimento verrà descritto dettagliatamente nel paragrafo seguente.

A conclusione della presente trattazione ricordiamo che il procedimento di calcolo qui presentato è di validità generale e pertanto si applica a tutti i sistemi lineari dotati di n gradi di libertà e privi di smorzamento: per tali sistemi si ottengono n pulsazioni proprie ed n modi principali di vibrare corrispondenti.

Nell'equazione caratteristica di un sistema ad n gradi di libertà compare un polinomio di grado $2n$ nella variabile ω , privo dei termini contenenti le potenze dispari di ω : ad esempio, per $n = 3$, si otterrebbe un'equazione caratteristica bicubica del tipo $A\omega^6 + B\omega^4 + C\omega^2 + D = 0$. Se si pone $\omega^2 = \gamma$, l'equazione caratteristica diviene di grado n nella variabile γ : le n soluzioni di tale equazione risultano sempre reali e possono essere calcolate con tecniche di calcolo numerico⁸.

5.1 Calcolo del moto libero mediante sovrapposizione dei modi principali

La conoscenza dei modi principali di vibrare permette di calcolare la generica vibrazione libera derivante da condizioni iniziali assegnate. Nel caso più generale questa vibrazione “contiene” tutti gli n modi principali di vibrare e si può quindi calcolare mediante una opportuna somma delle funzioni che definiscono tali modi. Con riferimento al sistema a due gradi di libertà studiato nel precedente paragrafo, indicando con $x_1(t)$ e $x_2(t)$ gli spostamenti delle due masse in vibrazione libera, si ha:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1^{(1)}(t) + x_1^{(2)}(t) = X_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + X_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ x_2(t) = x_2^{(1)}(t) + x_2^{(2)}(t) = X_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + X_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad (29)$$

Derivando le (29) si ottengono le velocità delle due masse:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \omega_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \\ \dot{x}_2(t) = \omega_1 X_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \omega_2 X_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad (30)$$

Poiché stiamo studiando un sistema a due gradi di libertà, è necessario assegnare quattro condizioni iniziali (due sulla posizione e due sulla velocità):

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(0) = x_{20} \\ \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20} \end{cases} \quad (31)$$

Dalle (29), (30) e (31) si ricava immediatamente:

$$\begin{cases} x_1(0) = X_1^{(1)} \sin \alpha_1 + X_1^{(2)} \sin \alpha_2 = x_{10} \\ x_2(0) = X_2^{(1)} \sin \alpha_1 + X_2^{(2)} \sin \alpha_2 = x_{20} \\ \dot{x}_1(0) = \omega_1 X_1^{(1)} \cos \alpha_1 + \omega_2 X_1^{(2)} \cos \alpha_2 = \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_2(0) = \omega_1 X_2^{(1)} \cos \alpha_1 + \omega_2 X_2^{(2)} \cos \alpha_2 = \dot{x}_{20} \end{cases} \quad (32)$$

Si osserva che, nel sistema (32) le incognite sono sei (le quattro ampiezze $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, $X_2^{(2)}$ ed i due angoli di fase α_1 , α_2) mentre le equazioni sono solo quattro; per risolvere il problema occorre introdurre le relazioni (24) che forniscono i rapporti fra le ampiezze di vibrazione nei singoli modi di vibrare. Si avrà pertanto:

$$\begin{cases} x_1(0) = r_1 X_2^{(1)} \sin \alpha_1 + r_2 X_2^{(2)} \sin \alpha_2 = x_{10} \\ x_2(0) = X_2^{(1)} \sin \alpha_1 + X_2^{(2)} \sin \alpha_2 = x_{20} \\ \dot{x}_1(0) = \omega_1 r_1 X_2^{(1)} \cos \alpha_1 + \omega_2 r_2 X_2^{(2)} \cos \alpha_2 = \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_2(0) = \omega_1 X_2^{(1)} \cos \alpha_1 + \omega_2 X_2^{(2)} \cos \alpha_2 = \dot{x}_{20} \end{cases} \quad (33)$$

⁸Un modo semplice per calcolare le soluzioni dell'equazione caratteristica consiste nel rappresentare in forma grafica la funzione che definisce il polinomio caratteristico (in funzione di ω o di γ) e nel verificare dove avviene l'intersezione con l'asse delle ascisse. In questo modo si possono ricavare le stime delle radici. Per ottenere valori più precisi si possono impiegare metodi di calcolo iterativi (bisezione, Newton-Raphson, ecc.), utilizzando come punti di innesco le stime precedentemente ottenute.

Per risolvere il sistema (33) conviene definire le seguenti quattro nuove variabili:

$$A = X_2^{(1)} \sin \alpha_1 \quad B = X_2^{(2)} \sin \alpha_2 \quad C = X_2^{(1)} \cos \alpha_1 \quad D = X_2^{(2)} \cos \alpha_2 \quad (34)$$

e riscrivere il sistema della forma:

$$\begin{cases} r_1 A + r_2 B = x_{10} \\ A + B = x_{20} \\ \omega_1 r_1 C + \omega_2 r_2 D = \dot{x}_{10} \\ \omega_1 C + \omega_2 D = \dot{x}_{20} \end{cases} \quad (35)$$

Osserviamo subito che le prime due equazioni del sistema così ottenuto contengono solo le incognite A e B , mentre le ultime due equazioni contengono solo le incognite C e D ; quindi la soluzione si può ottenere risolvendo separatamente le due coppie di equazioni. Sviluppando i calcoli si ricava:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{r_2 x_{20} - x_{10}}{r_1 - r_2} & B &= +\frac{r_1 x_{20} - x_{10}}{r_1 - r_2} \\ C &= -\frac{r_2 \dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}}{\omega_1 (r_1 - r_2)} & D &= +\frac{r_1 \dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}}{\omega_2 (r_1 - r_2)} \end{aligned} \quad (36)$$

Giunti a questo punto, le incognite effettive si possono calcolare ricordando le relazioni (34):

$$\begin{aligned} X_2^{(1)} &= \sqrt{A^2 + C^2} = \frac{1}{r_1 - r_2} \sqrt{(r_2 x_{20} - x_{10})^2 + \left(\frac{r_2 \dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}}{\omega_1} \right)^2} \\ X_2^{(2)} &= \sqrt{B^2 + D^2} = \frac{1}{r_1 - r_2} \sqrt{(r_1 x_{20} - x_{10})^2 + \left(\frac{r_1 \dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}}{\omega_2} \right)^2} \\ \alpha_1 &= \arctan \left(\frac{A}{C} \right) = \arctan \left[\frac{\omega_1 (r_2 x_{20} - x_{10})}{r_2 \dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}} \right] \\ \alpha_2 &= \arctan \left(\frac{B}{D} \right) = \arctan \left[\frac{\omega_2 (r_1 x_{20} - x_{10})}{r_1 \dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

Le ampiezze $X_1^{(1)}$ e $X_1^{(2)}$ risulteranno allora:

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} &= r_1 X_2^{(1)} = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \sqrt{(r_2 x_{20} - x_{10})^2 + \left(\frac{r_2 \dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}}{\omega_1} \right)^2} \\ X_1^{(2)} &= r_2 X_2^{(2)} = \frac{r_2}{r_1 - r_2} \sqrt{(r_1 x_{20} - x_{10})^2 + \left(\frac{r_1 \dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}}{\omega_2} \right)^2} \end{aligned} \quad (38)$$

5.2 Eccitazione di un particolare modo principale di vibrare

Se le condizioni iniziali vengono assegnate in modo opportuno, è possibile eccitare un solo modo principale di vibrare. Ciò significa che la vibrazione libera delle due masse risulterà costituita soltanto da un modo principale di vibrare: le due masse vibreranno con moto armonico (in fase o in controfase), alla frequenza del modo principale eccitato e con un rapporto fra le ampiezze costante ed uguale al valore caratteristico di quel modo.

Tenendo presenti le equazioni (29), l'eccitazione del primo modo principale richiede di annullare le ampiezze di vibrazione del secondo modo ($X_1^{(2)} = X_2^{(2)} = 0$); viceversa, l'eccitazione del secondo modo principale richiede di annullare le ampiezze di vibrazione del primo modo ($X_1^{(1)} = X_2^{(1)} = 0$). In base alle (37) e (38) occorre quindi che siano verificate le seguenti condizioni:

- per eccitare il primo modo:

$$\begin{cases} r_1 x_{20} - x_{10} = 0 \\ r_1 \dot{x}_{20} - \dot{x}_{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_{10}}{x_{20}} = r_1 \\ \frac{\dot{x}_{10}}{\dot{x}_{20}} = r_1 \end{cases} \quad (39)$$

- per eccitare il secondo modo:

$$\begin{cases} r_2 x_{20} - x_{10} = 0 \\ r_2 \dot{x}_{20} - \dot{x}_{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_{10}}{x_{20}} = r_2 \\ \frac{\dot{x}_{10}}{\dot{x}_{20}} = r_2 \end{cases} \quad (40)$$

In altri termini, i rapporti fra gli spostamenti iniziali e fra le velocità iniziali devono essere uguali al valore r_i ($i = 1, 2$) caratteristico del modo di vibrare che si vuole eccitare. Partendo, ad esempio da velocità iniziali nulle, l'eccitazione del modo di vibrare i -esimo si ottiene molto semplicemente spostando le due masse di quantità arbitrarie ma tali da rispettare il rapporto r_i (considerato con il proprio segno) e rilasciando successivamente le due masse in modo da farle vibrare liberamente⁹.

6 Problema agli autovalori-autovettori

Il calcolo delle pulsazioni proprie e dei vettori modali di un sistema a più gradi di libertà si può sempre formulare come un problema di calcolo degli *autovalori* e degli *autovettori* di una matrice¹⁰.

In algebra lineare si definiscono due tipi di problemi agli autovalori: il problema agli autovalori *semplice* ed il problema agli autovalori *generalizzato*. Richiamiamo brevemente il significato matematico dei due problemi, prima di continuare la trattazione relativa alle vibrazioni.

Problema agli autovalori semplice

Data una matrice \mathbf{A} di dimensione $n \times n$, risolvere il *problema agli autovalori semplice* per tale matrice significa calcolare i valori λ tali che il sistema lineare di equazioni

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \quad (41)$$

abbia una soluzione non banale. La soluzione non banale corrispondente ad un autovalore viene chiamata *autovettore*. L'equazione (41) può essere riscritta nella forma:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (42)$$

dove \mathbf{I} indica la matrice identità di dimensione n . Per ottenere una soluzione non banale è necessario imporre la condizione

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (43)$$

Sviluppando simbolicamente il determinante si ottiene un'equazione polinomiale di grado n (detta *equazione caratteristica*), avente la forma seguente:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (44)$$

Poiché tale equazione possiede n radici, la matrice \mathbf{A} ha n autovalori λ_i . Inoltre, essendo tutti reali i coefficienti a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) del polinomio caratteristico, l'eventuale presenza di un autovalore complesso implica anche la presenza del suo coniugato¹¹.

Se λ è un autovalore di \mathbf{A} , allora l'equazione (41), ammette un vettore soluzione \mathbf{X} non banale, che costituisce l'autovettore corrispondente a λ . Infine, poiché vale la (43), la matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ è singolare e quindi le equazioni del sistema non sono tutte indipendenti: ciò implica che l'autovettore \mathbf{X} è definito a meno di una costante. Per definire in modo univoco l'autovettore occorre assegnare arbitrariamente un valore a tale costante; per semplicità si è soliti assegnare valore unitario alla costante indeterminata.

⁹Qualora si volesse eccitare un modo principale di vibrare di un sistema reale (ad esempio due carrelli fissati ad una guida rettilinea e collegati tramite molle), occorre accertarsi che gli effetti di smorzamento dovuti all'attrito (sempre presenti) siano molto contenuti. In tal modo, rilevando sperimentalmente il moto delle due masse, si potranno ottenere (soprattutto nei primi istanti dell'esperimento) risultati simili a quelli ottenuti teoricamente, utilizzando il modello di sistema privo di smorzamento.

¹⁰In lingua inglese i termini autovalori e autovettori si traducono rispettivamente con *eigenvalues* e *eigenvectors*. Molti software per calcolo matematico avanzato forniscono funzioni di libreria per la soluzione di problemi agli autovalori-autovettori; tali funzioni possono essere utilmente impiegate nello studio delle vibrazioni, per il calcolo delle pulsazioni proprie e dei vettori modali di un sistema a più gradi di libertà.

¹¹Comunque, quando si calcolano le pulsazioni proprie di un sistema a più gradi di libertà, il polinomio caratteristico ha sempre soluzioni reali e positive.

Problema agli autovalori generalizzato

Date due matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} di dimensione $n \times n$, risolvere il *problema agli autovalori generalizzato* per tali matrici significa calcolare i valori λ tali che il sistema lineare di equazioni

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{X} \quad (45)$$

abbia una soluzione non banale. Procedendo in modo analogo a quanto fatto per il problema semplice, la (45) si può riscrivere nella forma

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (46)$$

e quindi la soluzione non banale si ricava imponendo la condizione

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}) = 0 \quad (47)$$

da cui si deduce l'equazione caratteristica, ancora di ordine n . Risolvendo tale equazione si ricavano gli n autovalori λ_i , che consentono di calcolare i corrispondenti n autovettori. Si noti che, per $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, si ottiene nuovamente il problema agli autovalori semplice.

Torniamo ora al nostro problema di vibrazioni e consideriamo le equazioni di moto in forma matriciale (8) ricavate nel paragrafo 4. Imponiamo che il sistema vibri secondo un modo principale di vibrare, utilizzando la soluzione (14), che qui riscriviamo in forma matriciale:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} \sin(\omega t + \alpha) \quad (48)$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è dato dalla (10) e $\mathbf{X} = \{X_1 \ X_2\}^T$.

Sostituendo nella (8) la soluzione (48) e semplificando i termini sinusoidali, si perviene alla seguente relazione

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (49)$$

che rappresenta la scrittura matriciale del sistema (16). L'analogia della relazione così ottenuta con la (46) è evidente: per rendersene conto basta infatti porre $\mathbf{K} = \mathbf{A}$, $\mathbf{M} = \mathbf{B}$ e $\omega^2 = \lambda$. Abbiamo così ricondotto il calcolo delle pulsazioni proprie e dei vettori modali ad un problema di autovalori-autovettori di tipo generalizzato. Una volta ottenuti gli n autovalori λ_i , le corrispondenti pulsazioni proprie si ricavano estraendo le radici quadrate degli autovalori, ovvero $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Moltiplicando per $-1/\omega^2$ ambo i membri della (49) si ricava:

$$\left(\mathbf{M} - \frac{1}{\omega^2}\mathbf{K}\right)\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (50)$$

ottenendo di nuovo un problema agli autovalori generalizzato in cui $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, $\mathbf{K} = \mathbf{B}$ e $1/\omega^2 = \lambda$. In questo caso, le pulsazioni proprie risulteranno $\omega_i = 1/\sqrt{\lambda_i}$.

Se si vuole ricondurre il calcolo delle frequenze proprie e dei vettori modali ad un problema agli autovalori semplice, si può procedere premoltiplicando per \mathbf{M}^{-1} ambo i membri della (49), ottenendo:

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (51)$$

Ponendo $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$, si ricava immediatamente:

$$(\mathbf{D} - \omega^2\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (52)$$

equazione che mostra chiaramente l'analogia con la (42). Dopo aver calcolato gli autovalori λ_i della matrice \mathbf{D} , le pulsazioni proprie ω_i si otterranno nuovamente con la relazione $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$.

In alternativa, se si premoltiplicano per \mathbf{K}^{-1} ambo i membri della (50) si ha¹²:

$$\left(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} - \frac{1}{\omega^2}\mathbf{I}\right)\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (53)$$

Ponendo ora $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$ si ottiene:

$$\left(\bar{\mathbf{D}} - \frac{1}{\omega^2}\mathbf{I}\right)\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (54)$$

equazione che evidenzia nuovamente un problema agli autovalori semplice. Indicando con λ_i gli autovalori della matrice $\bar{\mathbf{D}}$, le pulsazioni proprie ω_i risulteranno $\omega_i = 1/\sqrt{\lambda_i}$.

¹²La matrice \mathbf{K}^{-1} viene chiamata *matrice di cedevolezza* ed è appunto definita come l'inversa della matrice di rigidità. Tale matrice viene frequentemente utilizzata per lo studio delle vibrazioni flessionali di alberi e travi.

7 Accoppiamento delle coordinate

Come si è detto, le equazioni differenziali di un sistema a molti gradi di libertà sono accoppiate se la coordinata libera x_i (con le sue derivate), oltre a comparire nell'equazione di moto i -esima, compare anche in altre equazioni. Nel caso più generale, le n equazioni di un sistema non smorzato (in assenza di forzanti) sono accoppiate ed assumono la forma seguente:

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + \dots + m_{1n}\ddot{x}_n + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + \dots + k_{1n}x_n = 0 \\ m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 + \dots + m_{2n}\ddot{x}_n + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + \dots + k_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ m_{n1}\ddot{x}_1 + m_{n2}\ddot{x}_2 + \dots + m_{nn}\ddot{x}_n + k_{n1}x_1 + k_{n2}x_2 + \dots + k_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (55)$$

Esprimendo queste equazioni in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

in cui, per la simmetria delle matrici, $m_{ij} = m_{ji}$ e $k_{ij} = k_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

In assenza di smorzamento si possono avere due tipi di accoppiamento:

- *accoppiamento inerziale* (o *dinamico*) se la matrice delle masse è non-diagonale;
- *accoppiamento elastico* (o *statico*) se la matrice elastica è non-diagonale.

Nei casi più semplici si ha solo accoppiamento statico o dinamico (è il caso del sistema di Figura 1), mentre nei casi più complessi si riscontrano entrambi i tipi di accoppiamento.

È importante sottolineare che la scelta delle coordinate determina il tipo di accoppiamento presente in un sistema vibrante. Per chiarire il concetto, si mostrerà un esempio in cui il medesimo sistema dinamico, studiato con differenti tipi di coordinate, risulta accoppiato in modo differente a seconda delle variabili di posizione utilizzate.

Il sistema che vogliamo esaminare ha due gradi di libertà ed è costituito da una barra rigida, di massa m e momento d'inerzia baricentrico J_G , sospesa su due appoggi elastici di rigidezza k_1 e k_2 fissati alle due estremità e distanti rispettivamente l_1 ed l_2 dal baricentro G della barra (vedi Figura 4a).

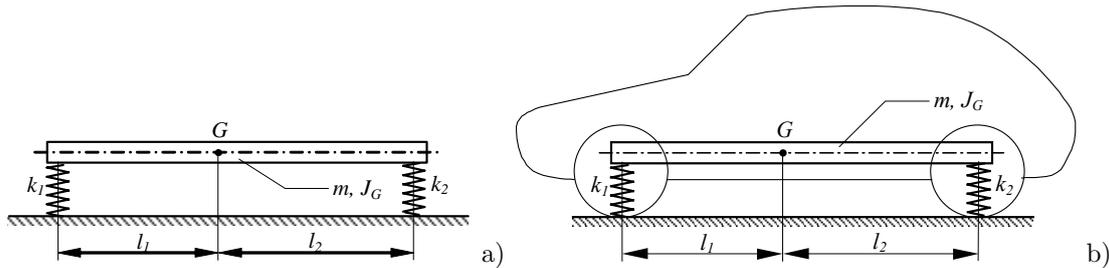


Figura 4: a) Barra rigida su appoggi elastici. b) Modello semplificato per lo studio della dinamica verticale di un veicolo.

Questo modello viene talvolta utilizzato per studiare in modo semplificato la dinamica verticale di un veicolo: in questo caso la barra rigida schematizza il corpo della vettura, mentre le due molle schematizzano la rigidezza equivalente della sospensione anteriore e posteriore (vedi Figura 4b).

Supponiamo che nella posizione di equilibrio (che assumeremo come riferimento per le coordinate) la barra sia perfettamente orizzontale; in tale posizione la deformazione statica delle molle è tale da generare due forze verticali in grado di equilibrare il peso della barra stessa.

Lo studio del problema viene ora suddiviso in quattro casi distinti, ciascuno dei quali corrisponde ad una diversa scelta delle coordinate di posizione. Nel primo caso utilizzeremo la posizione x_G del baricentro e la rotazione ϑ della barra, nel secondo la posizione x_H del punto H (detto *baricentro elastico*) e la rotazione ϑ ,

nel terzo la posizione x_A di un estremo della barra e la rotazione ϑ e nel quarto le posizioni x_A e x_B delle due estremità della barra.

Supporremo in tutti i casi che la rotazione della barra risulti di piccola entità, in modo tale da ritenere valida l'ipotesi di piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio ($\sin \vartheta \simeq \vartheta$, $\cos \vartheta \simeq 1$).

7.1 Caso n.1: Uso delle coordinate x_G e ϑ

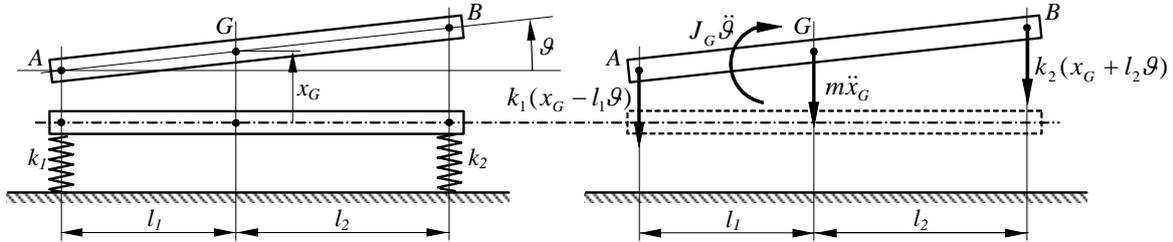


Figura 5: Coordinate di posizione e diagramma di corpo libero per il caso n.1.

Con questa scelta di coordinate ed adottando le convenzioni di segno indicate in Figura 5, gli spostamenti dei due estremi della barra valgono rispettivamente $x_A = x_G - l_1\vartheta$ e $x_B = x_G + l_2\vartheta$. Le forze elastiche F_A ed F_B assumono quindi i seguenti valori:

$$F_A = k_1 x_A = k_1(x_G - l_1\vartheta) \quad F_B = k_2 x_B = k_2(x_G + l_2\vartheta) \quad (57)$$

La forza d'inerzia F_i e la coppia d'inerzia C_i valgono rispettivamente:

$$F_i = m\ddot{x}_G \quad C_i = J_G\ddot{\vartheta} \quad (58)$$

Con riferimento al diagramma di corpo libero rappresentato in Figura 5, scriviamo le condizioni di equilibrio dinamico alla traslazione verticale ed alla rotazione attorno al baricentro G:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G + k_1(x_G - l_1\vartheta) + k_2(x_G + l_2\vartheta) = 0 \\ J_G\ddot{\vartheta} - k_1(x_G - l_1\vartheta)l_1 + k_2(x_G + l_2\vartheta)l_2 = 0 \end{cases} \quad (59)$$

Riordinando i vari termini nelle (59) si ha:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G + (k_1 + k_2)x_G + (k_2l_2 - k_1l_1)\vartheta = 0 \\ J_G\ddot{\vartheta} + (k_2l_2 - k_1l_1)x_G + (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\vartheta = 0 \end{cases} \quad (60)$$

In forma matriciale le (60) assumono la forma seguente:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{\vartheta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2l_2 - k_1l_1) \\ (k_2l_2 - k_1l_1) & (k_1l_1^2 + k_2l_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_G \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (61)$$

Osservando la struttura delle matrici ottenute si deduce che questa scelta di coordinate genera disaccoppiamento inerziale ed accoppiamento elastico. Nel caso particolare in cui $k_1l_1 = k_2l_2$ anche la matrice di rigidezza diventa diagonale ed il sistema risulta completamente disaccoppiato.

7.2 Caso n.2: Uso delle coordinate x_H e ϑ

In questo secondo caso una delle due coordinate utilizzate è la posizione del punto H, detto *baricentro elastico* della barra. Il baricentro elastico, in generale, non coincide con il baricentro G (che rappresenta, come è noto, il centro di massa o centro di gravità del corpo), ma risulta spostato rispetto a G di una quantità pari ad e (come indicato in Figura 6). Il baricentro elastico gode della seguente proprietà: applicando in tale punto una forza verticale F di valore arbitrario, la barra trasla in direzione verticale senza ruotare. Questa particolare proprietà del baricentro elastico può essere utilizzata per determinare la sua posizione.

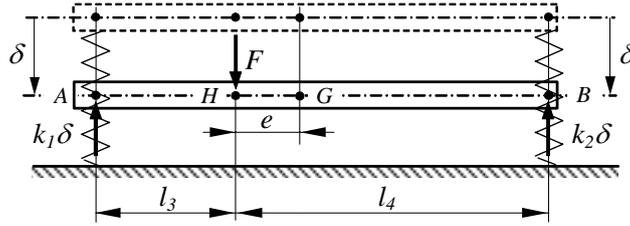


Figura 6: Effetto dell'applicazione di una forza nel baricentro elastico H: la barra trasla senza ruotare.

Con riferimento alla Figura 6, se applichiamo in H la forza F , tutti i punti della barra (quindi anche le estremità A e B) si spostano verso il basso di una quantità δ . Le forze elastiche che si generano alle estremità risultano pari a $k_1\delta$ e $k_2\delta$. Dalla condizione di equilibrio statico alla traslazione verticale si deduce immediatamente che $\delta = F/(k_1 + k_2)$, mentre dalla condizione di equilibrio statico alla rotazione attorno ad H si ricava:

$$k_1\delta(l_1 - e) = k_2\delta(l_2 + e) \quad (62)$$

Risolvendo la (62) rispetto ad e si ottiene:

$$e = \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{k_1 + k_2} \quad (63)$$

Se $k_1 l_1 = k_2 l_2$ si ottiene $e = 0$ e quindi il baricentro elastico H coincide con il centro di gravità G della barra; inoltre, se $k_1 l_1 < k_2 l_2$ il valore di e è negativo e quindi il punto H si trova alla destra del punto G.

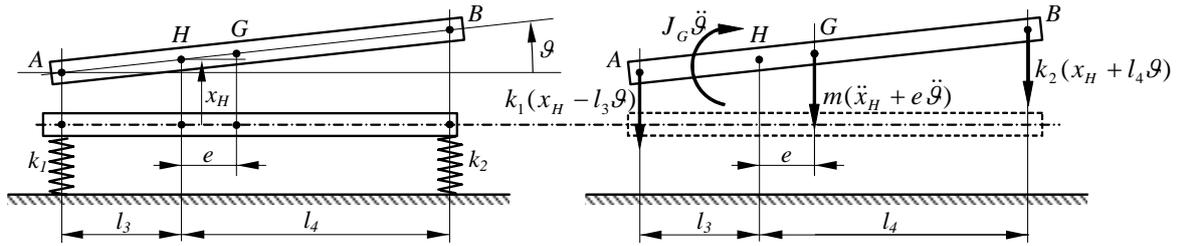


Figura 7: Coordinate di posizione e diagramma di corpo libero per il caso n.2.

Passiamo ora a studiare la dinamica del sistema utilizzando le coordinate x_H e ϑ . Indicando con l_3 ed l_4 le distanze del punto H dalle estremità della barra, si avrà (vedi Figura 7):

$$l_3 = l_1 - e \quad l_4 = l_2 + e \quad (64)$$

Utilizzando le coordinate x_H e ϑ ed adottando convenzioni di segno indicate in Figura 7, gli spostamenti dei due estremi della barra valgono rispettivamente $x_A = x_H - l_3\vartheta$ e $x_B = x_H + l_4\vartheta$, mentre lo spostamento del baricentro risulta $x_G = x_H + e\vartheta$. Le forze elastiche F_A ed F_B si possono quindi esprimere nel modo seguente:

$$F_A = k_1 x_A = k_1(x_H - l_3\vartheta) \quad F_B = k_2 x_B = k_2(x_H + l_4\vartheta) \quad (65)$$

La forza d'inerzia F_i e la coppia d'inerzia C_i assumono le espressioni sotto indicate:

$$F_i = m\ddot{x}_G = m(\ddot{x}_H + e\ddot{\vartheta}) \quad C_i = J_G\ddot{\vartheta} \quad (66)$$

Utilizzando il diagramma di corpo libero rappresentato in Figura 7, imponiamo le condizioni di equilibrio dinamico alla traslazione verticale ed alla rotazione attorno al baricentro elastico H:

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_H + e\ddot{\vartheta}) + k_1(x_H - l_3\vartheta) + k_2(x_H + l_4\vartheta) = 0 \\ J_G\ddot{\vartheta} - k_1(x_H - l_3\vartheta)l_3 + k_2(x_H + l_4\vartheta)l_4 + m(\ddot{x}_H + e\ddot{\vartheta})e = 0 \end{cases} \quad (67)$$

Riordinando i vari termini si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_H + me\ddot{\vartheta} + (k_1 + k_2)x_H + (k_2l_4 - k_1l_3)\vartheta = 0 \\ me\ddot{x}_H + (J_G + me^2)\ddot{\vartheta} + (k_2l_4 - k_1l_3)x_H + (k_1l_3^2 + k_2l_4^2)\vartheta = 0 \end{cases} \quad (68)$$

Dalle (62) e (64) si deduce immediatamente che $k_1 l_3 = k_2 l_4$; inoltre, ricordando che $J_H = J_G + me^2$ (momento d'inerzia della barra rispetto al punto H, calcolato con il teorema del trasporto¹³), le equazioni di moto (68) si semplificano nel modo seguente:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_H + me\ddot{\vartheta} + (k_1 + k_2)x_H = 0 \\ me\ddot{x}_H + J_H\ddot{\vartheta} + (k_1 l_3^2 + k_2 l_4^2)\vartheta = 0 \end{cases} \quad (69)$$

Riscrivendo la (69) con la notazione matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_H \\ \ddot{\vartheta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & 0 \\ 0 & (k_1 l_3^2 + k_2 l_4^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_H \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (70)$$

La struttura delle matrici ottenute indica che il sistema è ora accoppiato inerzialmente e disaccoppiato elasticamente.

7.3 Caso n.3: Uso delle coordinate x_A e ϑ

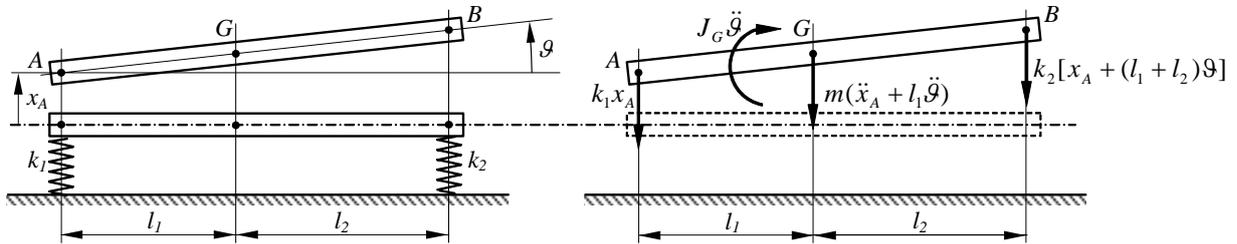


Figura 8: Coordinate di posizione e diagramma di corpo libero per il caso n.3.

Con questa scelta di coordinate ed adottando le convenzioni di segno indicate in Figura 8, lo spostamento dell'estremo B è pari a $x_B = x_A + (l_1 + l_2)\vartheta$, mentre lo spostamento del baricentro risulta $x_G = x_A + l_1\vartheta$. Le forze elastiche F_A ed F_B assumono pertanto le espressioni seguenti:

$$F_A = k_1 x_A \quad F_B = k_2 x_B = k_2 [x_A + (l_1 + l_2)\vartheta] \quad (71)$$

La forza d'inerzia F_i e la coppia d'inerzia C_i risultano:

$$F_i = m\ddot{x}_G = m(\ddot{x}_A + l_1\ddot{\vartheta}) \quad C_i = J_G\ddot{\vartheta} \quad (72)$$

Con l'ausilio del diagramma di corpo libero rappresentato in Figura 8, scriviamo le condizioni di equilibrio dinamico alla traslazione verticale ed alla rotazione attorno al punto A:

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_A + l_1\ddot{\vartheta}) + k_1 x_A + k_2 [x_A + (l_1 + l_2)\vartheta] = 0 \\ J_G\ddot{\vartheta} + k_2 [x_A + (l_1 + l_2)\vartheta](l_1 + l_2) + m(\ddot{x}_A + l_1\ddot{\vartheta})l_1 = 0 \end{cases} \quad (73)$$

Riordinando i vari termini si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_A + ml_1\ddot{\vartheta} + (k_1 + k_2)x_A + k_2(l_1 + l_2)\vartheta = 0 \\ ml_1\ddot{x}_A + (J_G + ml_1^2)\ddot{\vartheta} + k_2(l_1 + l_2)x_A + k_2(l_1 + l_2)^2\vartheta = 0 \end{cases} \quad (74)$$

Essendo $l = l_1 + l_2$ la lunghezza totale della barra e $J_A = J_G + ml_1^2$ il momento d'inerzia della barra rispetto all'estremo A (ottenuto con il teorema del trasporto), la (74) diviene:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_A + ml_1\ddot{\vartheta} + (k_1 + k_2)x_A + k_2 l \vartheta = 0 \\ ml_1\ddot{x}_A + J_A\ddot{\vartheta} + k_2 l x_A + k_2 l^2 \vartheta = 0 \end{cases} \quad (75)$$

¹³Ricordiamo che il *teorema del trasporto* (detto anche teorema di Huygens o di Steiner) afferma quanto segue: Dato un corpo rigido nel piano di massa m e momento d'inerzia baricentrico J_G , il momento d'inerzia J_P di tale corpo rispetto ad un generico punto P (anche non appartenente al corpo stesso) si ottiene con la relazione:

$$J_P = J_G + ml^2$$

dove l rappresenta la distanza di P dal baricentro G del corpo.

La riscrittura delle (75) in forma matriciale è la seguente

$$\begin{bmatrix} m & ml_1 \\ ml_1 & J_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{\vartheta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (76)$$

Le matrici ottenute mostrano che, con questa scelta di coordinate, il sistema è totalmente accoppiato.

7.4 Caso n.4: Uso delle coordinate x_A e x_B

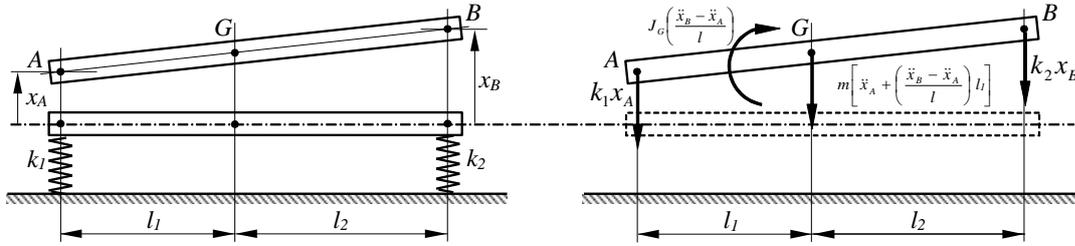


Figura 9: Coordinate di posizione e diagramma di corpo libero per il caso n.4.

Utilizzando come coordinate le posizioni delle due estremità della barra, le forze elastiche F_A ed F_B assumono un'espressione molto semplice; si ottiene infatti:

$$F_A = k_1 x_A \quad F_B = k_2 x_B \quad (77)$$

Con le convenzioni di segno indicate in Figura 9, la rotazione ϑ e lo spostamento x_G del baricentro risultano:

$$\vartheta = \frac{x_B - x_A}{l} \quad x_G = x_A + l_1 \vartheta = x_A + \frac{l_1}{l} (x_B - x_A) \quad (78)$$

La forza d'inerzia F_i e la coppia d'inerzia C_i si possono pertanto esprimere nella forma seguente:

$$F_i = m \ddot{x}_G = m \left[\ddot{x}_A + \frac{l_1}{l} (\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) \right] \quad C_i = J_G \ddot{\vartheta} = J_G \left(\frac{\ddot{x}_B - \ddot{x}_A}{l} \right) \quad (79)$$

Con riferimento diagramma di corpo libero rappresentato in Figura 9, imponiamo le condizioni di equilibrio dinamico alla rotazione attorno ai punti di estremità B ed A:

$$\begin{cases} m \left[\ddot{x}_A + \frac{l_1}{l} (\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) \right] l_2 - J_G \left(\frac{\ddot{x}_B - \ddot{x}_A}{l} \right) + k_1 x_A l = 0 \\ m \left[\ddot{x}_A + \frac{l_1}{l} (\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) \right] l_1 + J_G \left(\frac{\ddot{x}_B - \ddot{x}_A}{l} \right) + k_2 x_B l = 0 \end{cases} \quad (80)$$

Raccogliendo i coefficienti dei termini di accelerazione ed introducendo i momenti d'inerzia $J_A = J_G + ml_1^2$ e $J_B = J_G + ml_2^2$, calcolati rispetto ai punti di estremità della barra, si perviene alle equazioni sotto riportate:

$$\begin{cases} \left(\frac{J_B}{l^2} \right) \ddot{x}_A + \left(\frac{ml_1 l_2 - J_G}{l^2} \right) \ddot{x}_B + k_1 x_A = 0 \\ \left(\frac{ml_1 l_2 - J_G}{l^2} \right) \ddot{x}_A + \left(\frac{J_A}{l^2} \right) \ddot{x}_B + k_2 x_B = 0 \end{cases} \quad (81)$$

Riscrivendo le (81) in forma matriciale si ha:

$$\frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} J_B & (ml_1 l_2 - J_G) \\ (ml_1 l_2 - J_G) & J_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{x}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ x_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (82)$$

Come si può notare, le coordinate utilizzate generano accoppiamento inerziale e disaccoppiamento elastico, situazione analoga a quella già riscontrata nel caso n.2.

7.5 Osservazioni

L'esempio qui riportato mostra chiaramente che tipo di accoppiamento tra le equazioni di moto non è una proprietà intrinseca del sistema vibrante, ma dipende esclusivamente dalle coordinate di posizione utilizzate. Quindi le pulsazioni proprie del sistema assumono sempre lo stesso valore, indipendentemente dalle variabili di posizione utilizzate; anche i modi principali di vibrare non possono variare, in quanto anch'essi costituiscono una proprietà caratteristica del sistema in oggetto. Chiaramente i valori numerici che compaiono nei vettori modali risultano differenti a seconda delle coordinate utilizzate, ma la forma modale¹⁴ corrispondente ad un dato modo principale di vibrare rimane invariata. Per convincersi di questo fatto è sufficiente effettuare per via numerica i calcoli sopra riportati (assegnando valori numerici ai parametri del sistema) e determinare, per ogni modo principale di vibrare, gli spostamenti dei vari punti A, B, G e H (occorrerà ovviamente assegnare un valore arbitrario all'angolo ϑ). Si potrà verificare che, per un dato modo principale di vibrare, i rapporti fra le ampiezze di oscillazione corrispondono ad un'unica forma modale.

Per concludere, ricordiamo che il completo disaccoppiamento delle equazioni di moto è possibile utilizzando particolari coordinate dette *coordinate principali*; il vantaggio derivante dall'impiego delle coordinate principali è quello di ottenere equazioni indipendenti e quindi risolvibili separatamente attraverso i metodi di calcolo introdotti per i sistemi ad un solo grado di libertà.

Nei paragrafi successivi verrà descritto nei dettagli il procedimento di calcolo per la determinazione delle coordinate principali e le condizioni a cui deve soddisfare il sistema vibrante per consentire l'uso di tali coordinate.

8 Sistemi semidefiniti

I *sistemi semidefiniti* (detti anche *sistemi degeneri*) sono sistemi vibranti che possiedono alcune particolari caratteristiche; essi sono immediatamente riconoscibili per il fatto di non avere vincoli elastici che li collegano al telaio.

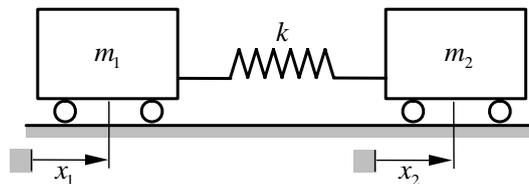


Figura 10: Sistema semidefinito a due gradi di libertà.

In Figura 10 è rappresentato un esempio di sistema semidefinito a due gradi di libertà; si osserva subito che, non essendo presenti molle collegate a terra, le due masse possono traslare liberamente senza deformare l'elemento elastico che le collega (perché ciò avvenga è infatti sufficiente che, ad ogni istante di tempo, gli spostamenti delle due masse siano uguali). Fra le varie possibilità di movimento esiste quindi il cosiddetto *moto rigido*, movimento per il quale i due carri si comportano come se fossero collegati da un elemento non deformabile.

Chiaramente, l'energia potenziale elastica associata al moto rigido è nulla, in quanto la molla, risultando indeformata, non immagazzina energia. Se esistessero collegamenti elastici a terra, non si avrebbe la possibilità di moto rigido, in quanto il moto delle due masse produrrebbe sempre la deformazione di una o più molle.

La possibilità di muoversi con moto rigido è una caratteristica di tutti i sistemi semidefiniti, indipendentemente dal loro numero di gradi di libertà. In uno dei prossimi capitoli vedremo che appartengono alla categoria dei sistemi vibranti semidefiniti anche gli alberi elasticamente deformabili a torsione dotati di masse calettate a distanze prefissate.

Per il sistema in Figura 10, trascurando la massa delle ruote, le equazioni di moto risultano:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \quad (83)$$

¹⁴Con il termine *forma modale* (in inglese *mode shape*) si indica la rappresentazione grafica del sistema in vibrazione secondo un dato modo principale di vibrare. Quindi la posizione in cui il sistema viene rappresentato è tale da rispettare il rapporto fra le ampiezze caratteristico di quel modo principale.

Utilizzando la notazione matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (84)$$

Calcoliamo le pulsazioni proprie del sistema imponendo la nota condizione:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (85)$$

dove:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (86)$$

Abbiamo pertanto:

$$\det \begin{bmatrix} k - \omega^2 m_1 & -k \\ -k & k - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (87)$$

Calcolando il determinante e raccogliendo i termini contenenti ω si ottiene:

$$m_1 m_2 \omega^4 - k(m_1 + m_2) \omega^2 = 0 \quad (88)$$

La (88) è l'equazione caratteristica del sistema in esame e, come si può notare, essa è priva del termine noto; le sue soluzioni sono le pulsazioni proprie del sistema e risultano:

$$\omega_0 = 0 \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \quad (89)$$

La mancanza del termine noto implica che una delle pulsazioni proprie sia nulla; per il nostro sistema, quindi, l'unica pulsazione propria significativa è quella indicata con il simbolo ω_1 .

La presenza di una pulsazione nulla è una caratteristica di tutti i sistemi semidefiniti. In generale possiamo affermare che, per un sistema semidefinito ad n gradi di libertà, si hanno sempre $n - 1$ pulsazioni proprie non nulle. Se poniamo $\omega = \omega_0 = 0$ nella (85) si ottiene:

$$\det \mathbf{K} = 0 \quad (90)$$

Quindi la matrice di rigidezza è singolare (ovvero ha determinante nullo). Anche questa è una caratteristica di tutti i sistemi semidefiniti, che può essere utilizzata nei programmi di calcolo per verificare se un dato sistema vibrante è degenere.

Passiamo ora al calcolo dei modi principali di vibrare, considerando il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{bmatrix} k - \omega^2 m_1 & -k \\ -k & k - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (91)$$

in cui X_1 e X_2 sono le ampiezze di oscillazione delle due masse. Poiché vale la (87), è possibile utilizzare una qualsiasi delle due equazioni del sistema per ricavare il rapporto fra le ampiezze. Se consideriamo la prima equazione, si ricava:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{k}{k - \omega^2 m_1} \quad (92)$$

Sostituendo nella (92) i valori delle pulsazioni proprie (89) si ottengono i rapporti fra le ampiezze per ciascun modo principale di vibrare:

$$\left(\frac{X_1}{X_2} \right)_{\omega=\omega_0} = 1 \quad \left(\frac{X_1}{X_2} \right)_{\omega=\omega_1} = -\frac{m_2}{m_1} \quad (93)$$

I vettori modali per il sistema in esame, calcolati ponendo $X_2 = 1$, risultano quindi:

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_0} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_1} = \begin{Bmatrix} -m_2/m_1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (94)$$

Osserviamo che il modo principale di vibrare corrispondente alla pulsazione nulla è proprio il *modo rigido* a cui si è accennato in precedenza: infatti gli spostamenti X_1 e X_2 sono identici ed il moto non può essere sinusoidale

perché la frequenza è nulla. Si tratta pertanto di una “non-vibrazione”, ovvero di una vibrazione “degenerata” in un movimento in cui le due masse subiscono lo stesso spostamento senza vibrare.

Per quanto riguarda invece modo principale alla pulsazione ω_1 , si nota che il rapporto tra le ampiezze di oscillazione è negativo; ciò significa che le due masse si spostano in senso opposto. Inoltre, essendo $|X_1/X_2| = m_2/m_1$ la massa più piccola si muove con ampiezza maggiore rispetto all'altra massa. Ciò risulta intuitivo, se si pensa che la massa piccola, avendo bassa inerzia, tende a vibrare più facilmente rispetto alla massa grande, che, al contrario, tende a restare ferma, compiendo solo piccole oscillazioni.

Giunti a questo punto, consideriamo nuovamente le equazioni di moto (83), riscrivendole nella forma:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k}{m_1}(x_1 - x_2) = 0 \\ \ddot{x}_2 - \frac{k}{m_2}(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \quad (95)$$

ottenuta dividendo la prima equazione per m_1 e la seconda per m_2 .

Se eseguiamo la sottrazione membro a membro si ottiene:

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (x_1 - x_2) = 0 \quad (96)$$

Introducendo la coordinata relativa $z = x_1 - x_2$, che esprime lo spostamento di una massa rispetto all'altra, la (96) diviene:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad (97)$$

dove si è posto:

$$\omega = \sqrt{k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \quad (98)$$

La (97) mostra chiaramente che il moto relativo di una massa rispetto all'altra è un moto armonico la cui pulsazione, data dalla (98), è esattamente quella che avevamo determinato in precedenza effettuando lo studio a due gradi di libertà (vedi la seconda delle equazioni(89)).

Si può inoltre osservare che l'introduzione della coordinata relativa riduce di una unità il numero dei gradi di libertà del sistema, poiché, in luogo delle due coordinate assolute x_1 e x_2 si utilizza una sola coordinata z , data dalla loro differenza.

Se ora proviamo a sommare membro a membro le equazioni di moto (83), si ottiene:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0 \quad (99)$$

relazione che esprime la condizione di equilibrio dinamico alla traslazione per l'insieme delle due masse. Se integriamo la (99) rispetto al tempo si ha:

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = P \quad (100)$$

in cui P è la costante di integrazione. Il primo membro dell'equazione così ottenuta rappresenta la quantità di moto dell'intero sistema, che, come è ovvio, deve rimanere costante, in quanto sul sistema non agiscono forze esterne.

Con l'aiuto della Figura 11 proviamo ora a calcolare la posizione del baricentro G delle due masse: la parte superiore della figura mostra la posizione del sistema all'istante iniziale $t = 0$, con le masse m_1 ed m_2 rispettivamente a distanza a e b dal riferimento di individuato dalla linea verticale più a sinistra nel disegno. In tale situazione il baricentro G viene a trovarsi, rispetto al riferimento, alla distanza c data da:

$$c = \frac{m_1 a + m_2 b}{m_1 + m_2} \quad (101)$$

La parte inferiore della Figura 11 mostra invece la posizione del sistema ad un generico istante di tempo t ; si noti che le coordinate x_1 , x_2 e x_G vengono misurate a partire dalle posizioni assunte dai rispettivi punti all'istante iniziale. In tale configurazione il baricentro G deve soddisfare la relazione:

$$m_1(x_1 + a) + m_2(x_2 + b) = (m_1 + m_2)(x_G + c) \quad (102)$$

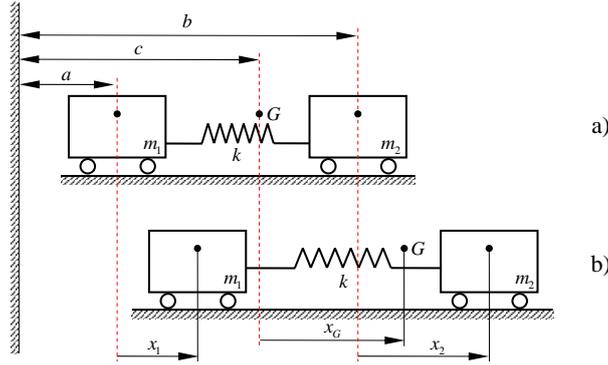


Figura 11: Moto dei carrelli e del loro baricentro: a) posizione del sistema all'istante iniziale $t = 0$; b) posizione al generico istante t .

che rappresenta l'equazione per il calcolo della posizione del baricentro rispetto alla linea verticale di sinistra assunta come riferimento. Sostituendo nella (102) il valore di c dato dalla (101) e risolvendo rispetto ad x_G si ricava:

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (103)$$

Torniamo ora a considerare la (100): se eseguiamo una nuova integrazione rispetto al tempo, si ricava:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = Pt + Q \quad (104)$$

dove Q indica una nuova costante di integrazione.

Tenendo conto della (103) la (104) assume la forma:

$$x_G = \left(\frac{P}{m_1 + m_2} \right) t + \left(\frac{Q}{m_1 + m_2} \right) = pt + q \quad (105)$$

dove $p = P/(m_1 + m_2)$ e $q = Q/(m_1 + m_2)$.

Abbiamo così dimostrato che il baricentro G delle due masse si muove con moto uniforme. Le costanti p e q si calcolano imponendo le condizioni iniziali; se all'istante $t = 0$ il baricentro G si trovava nella posizione $s_0 = c$ (vedi Figura 11) e possedeva già una velocità iniziale v , si ha $p = v$ e $q = s_0$ e quindi:

$$x_G = vt + s_0 \quad (106)$$

Da quanto sopra affermato, si deduce che, se inizialmente il baricentro è fermo, esso continua a restare fermo malgrado le due masse siano in movimento; quindi la vibrazione delle due masse avviene in modo tale che la posizione del baricentro rimanga ad ogni istante invariata.

Per calcolare il moto delle due masse, si procede, come di consueto, combinando i modi principali di vibrare, ricordando, però, che il primo dei modi principali è il moto rigido; la formula da utilizzare è la seguente:

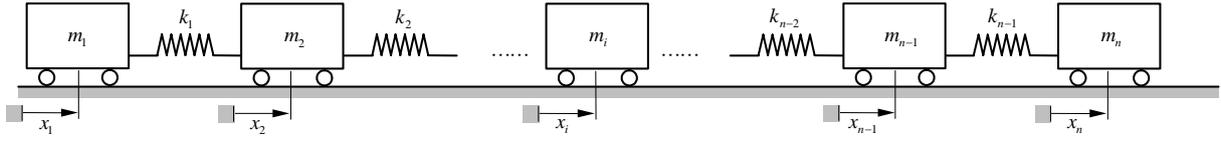
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}^{(0)}(C_1 + C_2 t) + \mathbf{X}^{(1)} A \sin(\omega t + \alpha) \quad (107)$$

dove ω è data dalla (98), mentre le costanti C_1 , C_2 , A e α si determinano in base alle quattro condizioni iniziali. Ricordando infine le (94) e ponendo $r = -m_2/m_1$, la (107) si può riscrivere nella forma:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (C_1 + C_2 t) + \begin{Bmatrix} r \\ 1 \end{Bmatrix} A \sin(\omega t + \alpha) \quad (108)$$

Per concludere, esaminiamo brevemente il caso generale rappresentato in Figura 12: si tratta di un sistema vibrante semidefinito ad n gradi di libertà, utilizzabile per studiare, ad esempio, il comportamento dinamico di un convoglio ferroviario tenendo conto dell'azione elastica dei respingenti.

Per tale sistema avremo una pulsazione propria $\omega_0 = 0$ ed $n - 1$ pulsazioni proprie ω_i non nulle; il vettore modale $\mathbf{X}^{(0)}$ (modo rigido) sarà rappresentato da una n -upla di valori identici (ad esempio tutti unitari), mentre gli altri $n - 1$ vettori modali saranno rappresentati dalle corrispondenti n -uple, denominate rispettivamente $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$, \dots , $\mathbf{X}^{(n-1)}$.

Figura 12: Sistema semidefinito ad n gradi di libertà.

Il moto libero delle n masse si potrà calcolare generalizzando la formula (107) nel modo seguente:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}^{(0)}(C_1 + C_2 t) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{X}^{(i)} A_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (109)$$

Si può immediatamente verificare che le costanti da calcolare nella (109) sono in tutto $2n$: le $n - 1$ costanti A_i , le $n - 1$ costanti α_i e le due costanti C_1 e C_2 . Per il loro calcolo si dovranno ovviamente utilizzare le $2n$ condizioni iniziali.

9 Vibrazioni libere di sistemi con smorzamento viscoso

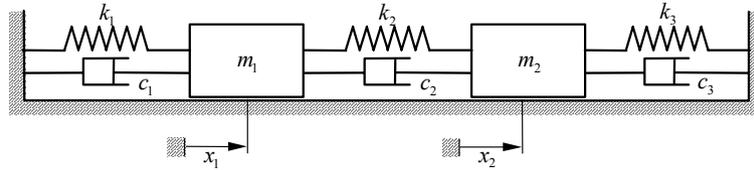


Figura 13: Sistema a due gradi di libertà con smorzamento.

Come è noto, nella realtà fisica le dissipazioni energetiche sono sempre presenti e quindi i modelli di calcolo privi di smorzamento non permettono di simulare in modo accurato il comportamento dinamico dei sistemi reali, sebbene tali modelli siano comunque utili per un'analisi approssimata dei fenomeni vibratorii e risultino relativamente semplici da trattare dal punto di vista analitico.

Come vedremo nel seguito, la trattazione che include lo smorzamento complica notevolmente il problema dal punto di vista matematico e, per la complessità dei calcoli, richiede il supporto di un elaboratore. Per iniziare lo studio delle vibrazioni smorzate a più gradi di libertà, consideriamo il semplice sistema rappresentato in Figura 13, per il quale possiamo scrivere le seguenti equazioni di moto:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \end{cases} \quad (110)$$

In forma matriciale otteniamo:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (111)$$

in cui $\mathbf{x} = \{x_1 \ x_2\}^T$, mentre le matrici \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} sono definite dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \quad (112)$$

Si osservi che la struttura della matrice di smorzamento \mathbf{C} è identica a quella della matrice di rigidità \mathbf{K} , poiché, nell'esempio qui esaminato, ad ogni molla di costante k_i viene abbinato uno smorzatore in parallelo di costante c_i ($i = 1, 2, 3$).

9.1 Soluzione mediante sviluppi simbolici

La presenza dello smorzamento viscoso determina la comparsa, nell'equazione di moto, di forze dipendenti dalla velocità; in questo caso il calcolo della soluzione è più complesso rispetto al caso non smorzato. La soluzione

dell'equazione matriciale (111) deve essere scritta nella forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}e^{\lambda t} = \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} e^{\lambda t} \quad (113)$$

Sostituendo la soluzione (113) e le sue derivate nell'equazione di moto matriciale (111) e semplificando il termine $e^{\lambda t}$, si ricava:

$$\mathbf{\Delta}^*(\lambda)\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (114)$$

dove la matrice $\mathbf{\Delta}^*(\lambda)$ è definita nel modo seguente:

$$\mathbf{\Delta}^*(\lambda) = \mathbf{K} + \lambda\mathbf{C} + \lambda^2\mathbf{M} \quad (115)$$

Tenendo conto delle espressioni (112), il sistema di equazioni (114) assume la forma seguente:

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) + (c_1 + c_2)\lambda + m_1\lambda^2 & -(k_2 + c_2\lambda) \\ -(k_2 + c_2\lambda) & (k_2 + k_3) + (c_2 + c_3)\lambda + m_2\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (116)$$

Si ottiene in questo modo un sistema omogeneo di equazioni algebriche, per il quale occorre calcolare una soluzione non banale, ovvero una soluzione diversa da quella nulla ($A = B = 0$); a tale scopo procediamo imponendo che il determinante della matrice dei coefficienti sia nullo:

$$\det \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) + (c_1 + c_2)\lambda + m_1\lambda^2 & -(k_2 + c_2\lambda) \\ -(k_2 + c_2\lambda) & (k_2 + k_3) + (c_2 + c_3)\lambda + m_2\lambda^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (117)$$

Sviluppando il determinante si ottiene l'equazione caratteristica del sistema vibrante:

$$[(k_1 + k_2) + (c_1 + c_2)\lambda + m_1\lambda^2][(k_2 + k_3) + (c_2 + c_3)\lambda + m_2\lambda^2] - (k_2 + c_2\lambda)^2 = 0 \quad (118)$$

Con alcuni passaggi algebrici è possibile riscrivere tale equazione nella forma:

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (119)$$

in cui i coefficienti a_3 , a_2 , a_1 e a_0 , che dipendono unicamente dai parametri fisici del sistema vibrante (masse, rigidzze e costanti di smorzamento), assumono le espressioni sotto riportate:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2 + c_3}{m_2} \\ a_2 &= \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} + \frac{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{m_1m_2} \\ a_1 &= \frac{c_1(k_2 + k_3) + c_2(k_1 + k_3) + c_3(k_1 + k_2)}{m_1m_2} \\ a_0 &= \frac{k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3}{m_1m_2} \end{aligned} \quad (120)$$

La (119) è un'equazione polinomiale di quarto grado nella variabile λ , la cui soluzione può essere ottenuta con metodi numerici¹⁵.

Si noti che, essendo i valori di m_i ($i = 1, 2$), k_i e c_i ($i = 1, 2, 3$) sempre positivi, i coefficienti a_0 , a_1 , a_2 e a_3 risultano anch'essi sempre positivi; pertanto l'equazione caratteristica (119) non può mai avere soluzioni reali e positive. Si hanno quindi le seguenti possibilità:

- a) quattro radici reali e negative;
- b) due radici reali negative e due radici complesse e coniugate;
- c) quattro radici complesse coniugate a coppie.

¹⁵In realtà è possibile risolvere anche per via analitica un'equazione algebrica di quarto grado, ma la soluzione è piuttosto laboriosa.

Nei casi in cui siano presenti soluzioni complesse e coniugate, la parte reale di tali soluzioni è sempre negativa ed aumenta (in valore assoluto) all'aumentare dell'entità dello smorzamento presente nel sistema. In condizioni di smorzamento elevato si hanno sempre soluzioni reali, mentre in presenza di smorzamento basso le soluzioni sono complesse coniugate; la presenza contemporanea di soluzioni reali e di soluzioni complesse è indice di un livello di smorzamento che potremo definire "intermedio".

Supponiamo ora di aver ricavato le soluzioni λ_k ($k = 1, \dots, 4$) dell'equazione caratteristica; dalla teoria delle equazioni differenziali lineari è noto che la soluzione completa del sistema (111) deve essere scritta come somma di quattro funzioni espresse nella forma (113):

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^4 \mathbf{X}_k e^{\lambda_k t} = \sum_{k=1}^4 \left\{ \begin{array}{c} A_k \\ B_k \end{array} \right\} e^{\lambda_k t} \quad (121)$$

Per maggiore chiarezza, riscriviamo le equazioni (121) senza ricorrere alla notazione vettoriale e al simbolo di sommatoria:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 e^{\lambda_4 t} \\ x_2(t) &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + B_3 e^{\lambda_3 t} + B_4 e^{\lambda_4 t} \end{aligned} \quad (122)$$

Per determinare le otto costanti A_k e B_k ($k = 1, \dots, 4$) occorrono ovviamente otto equazioni; quattro equazioni si ricavano dalle condizioni iniziali del problema, mentre le rimanenti quattro si ottengono dal sistema lineare omogeneo (116). Procediamo quindi ricavando da tale sistema i rapporti A/B ; dalla prima delle due equazioni si ottiene:

$$\frac{A}{B} = \frac{k_2 + \lambda c_2}{m_1 \lambda^2 + (c_1 + c_2)\lambda + (k_1 + k_2)} = p(\lambda) \quad (123)$$

mentre dalla seconda equazione si ha:

$$\frac{A}{B} = \frac{m_2 \lambda^2 + (c_2 + c_3)\lambda + (k_2 + k_3)}{k_2 + \lambda c_2} = q(\lambda) \quad (124)$$

Per semplicità, tali rapporti sono stati indicati mediante le due funzioni $p(\lambda)$ ed $q(\lambda)$. In corrispondenza dei valori λ_k , la matrice dei coefficienti del sistema (116) ha determinante nullo e quindi le due equazioni forniscono lo stesso valore per il rapporto A/B ; possiamo pertanto scrivere¹⁶:

$$p(\lambda_k) = q(\lambda_k) = \frac{A_k}{B_k} = r_k \quad k = 1, \dots, 4 \quad (125)$$

dove il simbolo r_k indica evidentemente il rapporto A/B , calcolato per $\lambda = \lambda_k$.

Considerando le relazioni (125) possiamo riscrivere la soluzione (122) nella forma:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sum_{k=1}^4 r_k B_k e^{\lambda_k t} = r_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + r_2 B_2 e^{\lambda_2 t} + r_3 B_3 e^{\lambda_3 t} + r_4 B_4 e^{\lambda_4 t} \\ x_2(t) &= \sum_{k=1}^4 B_k e^{\lambda_k t} = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + B_3 e^{\lambda_3 t} + B_4 e^{\lambda_4 t} \end{aligned} \quad (126)$$

Per il calcolo delle quattro costanti B_k ($k = 1, \dots, 4$) occorre considerare, come si è detto, le condizioni iniziali, che saranno espresse nella forma:

$$x_1(0) = x_{10} \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10} \quad x_2(0) = x_{20} \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20} \quad (127)$$

Derivando rispetto al tempo le (126) si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \sum_{k=1}^4 r_k \lambda_k B_k e^{\lambda_k t} \\ \dot{x}_2(t) &= \sum_{k=1}^4 \lambda_k B_k e^{\lambda_k t} \end{aligned} \quad (128)$$

¹⁶Se λ e λ^* sono due soluzioni complesse e coniugate, anche i corrispondenti rapporti A/B risulteranno complessi e coniugati; pertanto se: $p(\lambda) = q(\lambda) = r$ deve risultare $p(\lambda^*) = q(\lambda^*) = r^*$ dove r^* rappresenta il complesso coniugato di r .

Imponendo le condizioni iniziali si perviene al seguente sistema lineare di equazioni:

$$\begin{cases} x_1(0) = \sum_{k=1}^4 r_k B_k = x_{10} \\ x_2(0) = \sum_{k=1}^4 B_k = x_{20} \\ \dot{x}_1(0) = \sum_{k=1}^4 r_k \lambda_k B_k = \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_2(0) = \sum_{k=1}^4 \lambda_k B_k = \dot{x}_{20} \end{cases} \quad (129)$$

che, con notazione matriciale, può essere riscritto nella forma seguente:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 \lambda_1 & r_2 \lambda_2 & r_3 \lambda_3 & r_4 \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{bmatrix} \quad (130)$$

La soluzione è quindi:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 \lambda_1 & r_2 \lambda_2 & r_3 \lambda_3 & r_4 \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{bmatrix} \quad (131)$$

La soluzione espressa nella forma (126) è di tipo generale e può essere sempre utilizzata, sia per valori reali, sia per valori complessi delle radici λ_k ; tuttavia è possibile riscrivere la soluzione in modi diversi a seconda dell'entità dello smorzamento presente nel sistema. Nel seguito si analizzeranno nei dettagli i casi che si possono presentare; si noti che i tipi di smorzamento possibili verranno definiti qualitativamente con gli aggettivi "basso", "intermedio" ed "elevato", poiché, contrariamente a quanto avviene per i sistemi vibranti ad un solo grado di libertà, per i sistemi vibranti a più gradi di libertà, non è possibile definire un fattore di smorzamento adimensionale rispetto al quale effettuare la classificazione dello smorzamento¹⁷.

9.1.1 Caso n.1: Smorzamento "basso"

Nel caso di smorzamento basso si hanno soluzioni complesse e coniugate a coppie del tipo $\lambda_{1,2} = -\alpha_1 \pm i\omega_{s1}$ e $\lambda_{3,4} = -\alpha_2 \pm i\omega_{s2}$, dove le parti reali α_1 e α_2 crescono all'aumentare dello smorzamento, mentre i coefficienti delle parti immaginarie ω_{s1} e ω_{s2} , indicano le pulsazioni proprie smorzate del sistema. Se lo smorzamento viene completamente eliminato, le soluzioni si trovano tutte sull'asse immaginario ed assumono i valori $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ e $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$, dove i simboli ω_1 e ω_2 indicano le pulsazioni proprie del sistema (vedi Figura 14a). Se invece lo smorzamento risulta di piccola entità, si ha la situazione rappresentata in Figura 14b e la soluzione (126) può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\alpha_1 t} (r_1 B_1 e^{i\omega_{s1} t} + r_2 B_2 e^{-i\omega_{s1} t}) + e^{-\alpha_2 t} (r_3 B_3 e^{i\omega_{s2} t} + r_4 B_4 e^{-i\omega_{s2} t}) \\ x_2(t) &= e^{-\alpha_1 t} (B_1 e^{i\omega_{s1} t} + B_2 e^{-i\omega_{s1} t}) + e^{-\alpha_2 t} (B_3 e^{i\omega_{s2} t} + B_4 e^{-i\omega_{s2} t}) \end{aligned} \quad (132)$$

I termini tra parentesi nella (132) sono somme di due funzioni esponenziali complesse: utilizzando le relazioni indicate in nota¹⁸ si possono eliminare tali termini, sostituendoli con funzioni seno e coseno. Il risultato finale

¹⁷In realtà, se si studia un sistema vibrante a più gradi di libertà con l'approccio modale, è ancora possibile definire un parametro adimensionale (detto *fattore di smorzamento modale*), che permette di dare una valutazione quantitativa del grado di smorzamento per ciascuna coordinata principale (o modale).

¹⁸Utilizzando la formula di Eulero $e^{\pm i\vartheta} = \cos \vartheta \pm i \sin \vartheta$, possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} B_1 e^{i\omega_{s1} t} + B_2 e^{-i\omega_{s1} t} &= C_1 \cos \omega_{s1} t + C_2 \sin \omega_{s1} t & \text{con} & \quad C_1 = B_1 + B_2 \quad C_2 = i(B_1 - B_2) \\ B_3 e^{i\omega_{s2} t} + B_4 e^{-i\omega_{s2} t} &= C_3 \cos \omega_{s2} t + C_4 \sin \omega_{s2} t & \text{con} & \quad C_3 = B_3 + B_4 \quad C_4 = i(B_3 - B_4) \\ r_1 B_1 e^{i\omega_{s1} t} + r_2 B_2 e^{-i\omega_{s1} t} &= p_1 C_1 \cos \omega_{s1} t + p_2 C_2 \sin \omega_{s1} t & \text{con} & \quad p_1 C_1 = r_1 B_1 + r_2 B_2 \quad p_2 C_2 = i(r_1 B_1 - r_2 B_2) \\ r_3 B_3 e^{i\omega_{s2} t} + r_4 B_4 e^{-i\omega_{s2} t} &= p_3 C_3 \cos \omega_{s2} t + p_4 C_4 \sin \omega_{s2} t & \text{con} & \quad p_3 C_3 = r_3 B_3 + r_4 B_4 \quad p_4 C_4 = i(r_3 B_3 - r_4 B_4) \end{aligned}$$

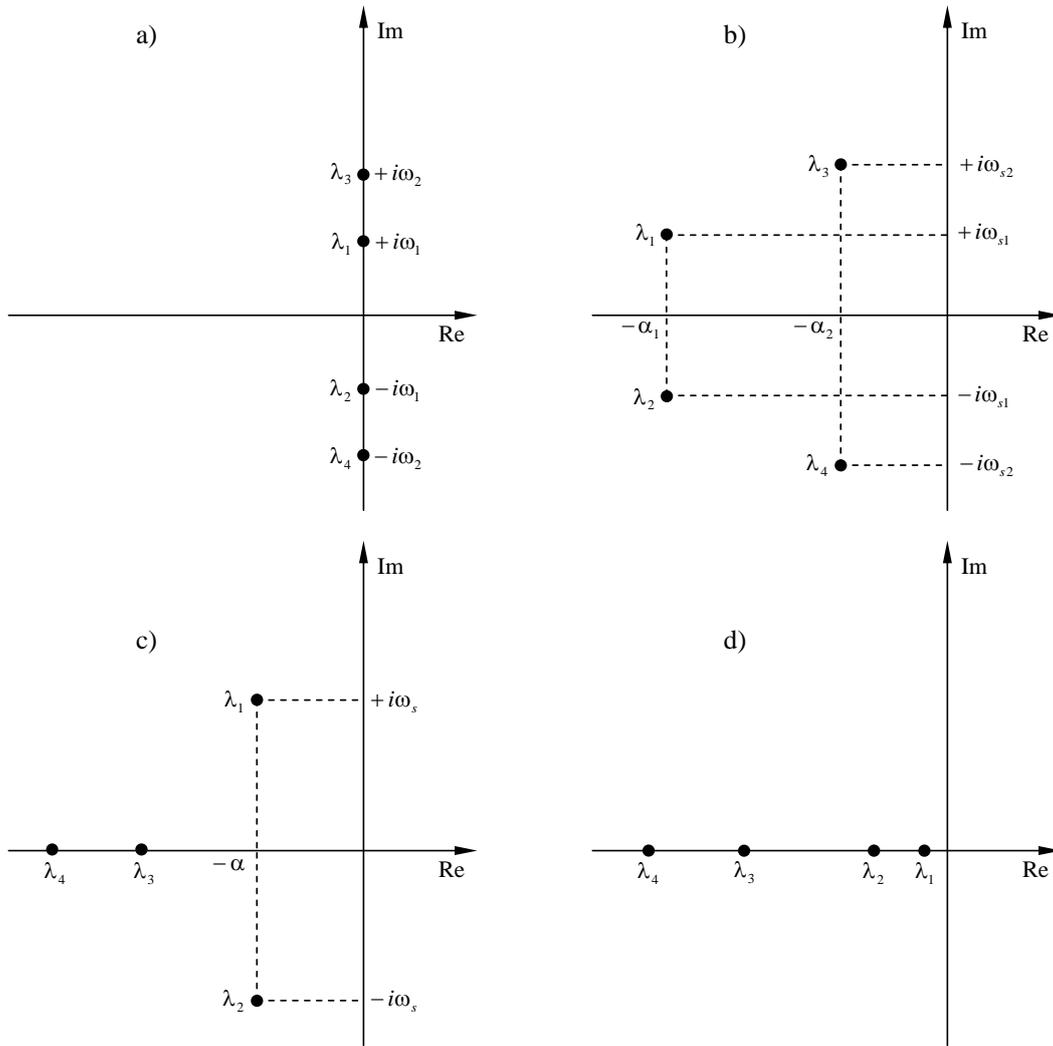


Figura 14: Posizione occupata nel piano complesso dalle radici dell'equazione caratteristica: a) sistema non smorzato; b) sistema con smorzamento basso; c) sistema con smorzamento intermedio; d) sistema con smorzamento elevato.

è il seguente:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= e^{-\alpha_1 t} (p_1 C_1 \cos \omega_{s1} t + p_2 C_2 \sin \omega_{s1} t) + e^{-\alpha_2 t} (p_3 C_3 \cos \omega_{s2} t + p_4 C_4 \sin \omega_{s2} t) \\
 x_2(t) &= e^{-\alpha_1 t} (C_1 \cos \omega_{s1} t + C_2 \sin \omega_{s1} t) + e^{-\alpha_2 t} (C_3 \cos \omega_{s2} t + C_4 \sin \omega_{s2} t)
 \end{aligned}
 \tag{133}$$

In base alla (125) ad ogni soluzione λ_k corrisponde un rapporto r_k ($k = 1, \dots, 4$); se i valori λ_k sono complessi e coniugati, anche i corrispondenti rapporti r_k saranno fra loro complessi e coniugati (vedi nota a pagina 22). Pertanto, indicati con i simboli a, b, c, d quattro valori reali, alla coppia di soluzioni $\lambda_{1,2} = -\alpha_1 \pm i\omega_{s1}$ corrisponderanno i rapporti $r_{1,2} = a \pm ib$, mentre alla coppia di soluzioni $\lambda_{3,4} = -\alpha_2 \pm i\omega_{s2}$ corrisponderanno i rapporti $r_{3,4} = c \pm id$.

Tenendo presenti le relazioni algebriche fra le varie costanti C_k e B_k ($k = 1, \dots, 4$), riportate nella nota sopra citata, e i valori r_k sopra definiti, è possibile ricavare con semplici passaggi le espressioni delle costanti p_k , che risultano:

$$p_1 = a + b \frac{C_2}{C_1} \quad p_2 = a - b \frac{C_1}{C_2} \quad p_3 = c + d \frac{C_4}{C_3} \quad p_4 = c - d \frac{C_3}{C_4}
 \tag{134}$$

Infine, per rendere ancora più compatte le espressioni (133), si possono utilizzare solo termini di tipo “seno” o di tipo “coseno”, introducendo opportuni angoli di fase; ad esempio, scrivendo la soluzione solo con termini

di tipo “seno”, si ottiene¹⁹:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= X_{11}e^{-\alpha_1 t} \sin(\omega_{s1}t + \gamma_1) + X_{12}e^{-\alpha_2 t} \sin(\omega_{s2}t + \gamma_2) \\x_2(t) &= X_{21}e^{-\alpha_1 t} \sin(\omega_{s1}t + \delta_1) + X_{22}e^{-\alpha_2 t} \sin(\omega_{s2}t + \delta_2)\end{aligned}\quad (135)$$

dove:

$$\begin{aligned}X_{21} &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} & \tan \delta_1 &= \frac{C_1}{C_2} \\X_{22} &= \sqrt{C_3^2 + C_4^2} & \tan \delta_2 &= \frac{C_3}{C_4} \\X_{11} &= \sqrt{(p_1 C_1)^2 + (p_2 C_2)^2} = X_{21} \sqrt{a^2 + b^2} & \tan \gamma_1 &= \frac{p_1 C_1}{p_2 C_2} \\X_{12} &= \sqrt{(p_3 C_3)^2 + (p_4 C_4)^2} = X_{22} \sqrt{c^2 + d^2} & \tan \gamma_2 &= \frac{p_3 C_3}{p_4 C_4}\end{aligned}\quad (136)$$

9.1.2 Caso n.2: Smorzamento “intermedio”

La Figura 14c mostra la posizione delle radici dell'equazione caratteristica nel caso di smorzamento intermedio: si ha una coppia di soluzioni complesse e coniugate $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\omega_s$ e due soluzioni reali e negative $\lambda_3 = -v_3$ e $\lambda_4 = -v_4$ (con $v_3, v_4 > 0$). La soluzione delle equazioni di moto si scrive quindi nella forma:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{-\alpha t} (r_1 B_1 e^{i\omega_s t} + r_2 B_2 e^{-i\omega_s t}) + r_3 B_3 e^{-v_3 t} + r_4 B_4 e^{-v_4 t} \\x_2(t) &= e^{-\alpha t} (B_1 e^{i\omega_s t} + B_2 e^{-i\omega_s t}) + B_3 e^{-v_3 t} + B_4 e^{-v_4 t}\end{aligned}\quad (137)$$

Procedendo come nel caso precedente, possiamo riscrivere la soluzione nella forma equivalente:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{-\alpha t} (p_1 C_1 \cos \omega_s t + p_2 C_2 \sin \omega_s t) + r_3 B_3 e^{-v_3 t} + r_4 B_4 e^{-v_4 t} \\x_2(t) &= e^{-\alpha t} (C_1 \cos \omega_s t + C_2 \sin \omega_s t) + B_3 e^{-v_3 t} + B_4 e^{-v_4 t}\end{aligned}\quad (138)$$

in cui compaiono termini trigonometrici di tipo “seno” e “coseno”, oppure nella forma:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= X_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_s t + \gamma) + r_3 B_3 e^{-v_3 t} + r_4 B_4 e^{-v_4 t} \\x_2(t) &= X_2 e^{-\alpha t} \sin(\omega_s t + \delta) + B_3 e^{-v_3 t} + B_4 e^{-v_4 t}\end{aligned}\quad (139)$$

in cui compaiono solo termini di tipo “seno”. Per il calcolo delle varie costanti, si segue il procedimento illustrato in precedenza.

9.1.3 Caso n.3: Smorzamento “elevato”

Se lo smorzamento è elevato, si avranno quattro radici reali e negative, del tipo $\lambda_k = -v_k$ (con $v_k > 0$, $k = 1, \dots, 4$); la posizione delle radici nel piano complesso è rappresentata in Figura 14d. La soluzione sarà quindi:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= r_1 B_1 e^{-v_1 t} + r_2 B_2 e^{-v_2 t} + r_3 B_3 e^{-v_3 t} + r_4 B_4 e^{-v_4 t} \\x_2(t) &= B_1 e^{-v_1 t} + B_2 e^{-v_2 t} + B_3 e^{-v_3 t} + B_4 e^{-v_4 t}\end{aligned}\quad (140)$$

e sarà caratterizzata da assenza di oscillazioni.

In conclusione possiamo affermare che, a prescindere dall'entità dello smorzamento, gli spostamenti x_1 e x_2 delle due masse tendono a zero per $t \rightarrow \infty$, come già visto per i sistemi ad un solo grado di libertà. Dal punto di vista pratico, possiamo ritenere terminato il movimento dopo un intervallo di tempo finito.

¹⁹Per ricavare le relazioni (136) è sufficiente ricordare che:

$$P \cos \omega t + Q \sin \omega t = Z \sin(\omega t + \vartheta)$$

con:

$$Z = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \tan \vartheta = \frac{P}{Q}$$

9.2 Soluzione mediante le equazioni di stato

Il procedimento descritto in precedenza richiede calcoli abbastanza laboriosi; infatti:

- occorre sviluppare simbolicamente il determinante della matrice $\Delta^*(\lambda)$, operazione che risulta particolarmente onerosa anche per sistemi con pochi gradi di libertà; i solutori simbolici per computer, pur offrendo un valido aiuto, hanno anch'essi un limite sul tipo di espressioni che riescono a trattare e, anche utilizzando i software più potenti, si ottengono pur sempre espressioni simboliche lunghissime, difficilmente gestibili in modo efficiente;
- per un sistema vibrante ad n gradi di libertà, lo sviluppo simbolico del determinante produce un'equazione polinomiale di grado $2n$, che risulta di difficile risoluzione.

Per eliminare questi problemi, si può adottare il seguente approccio analitico, che richiede una riscrittura delle equazioni di moto nel cosiddetto *spazio di stato*. Partendo dalle equazioni di moto scritte nella forma matriciale classica:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (141)$$

esplicitiamo rispetto al vettore delle accelerazioni, ottenendo l'espressione seguente:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (142)$$

Consideriamo ora l'identità $\dot{\dot{\mathbf{x}}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ e riscriviamo il tutto in forma di sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (143)$$

tenendo presente che ciascuna delle due equazioni del sistema (143) è un'equazione matriciale.

Definiamo a questo punto il vettore:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} \quad (144)$$

detto *vettore di stato*²⁰ e costruito sovrapponendo al vettore delle velocità $\dot{\mathbf{x}}(t)$ il vettore delle posizioni $\mathbf{x}(t)$. Si osservi che le dimensioni di $\mathbf{y}(t)$ sono $2n \times 1$.

Continuiamo la trattazione definendo la *matrice di stato* \mathbf{A} , di dimensione $2n \times 2n$, ottenuta tramite la seguente relazione:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{array} \right] \quad (145)$$

in cui i simboli $\mathbf{0}$ e \mathbf{I} indicano rispettivamente la matrice nulla e la matrice identità di ordine n .

Utilizzando le definizioni (144) e (145) e ricordando che le regole del prodotto matriciale si possono applicare anche a matrici e vettori a loro volta costituiti da matrici e vettori, il sistema (143) può essere riscritto nella forma compatta

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) \quad (146)$$

La soluzione del sistema (146) è del tipo

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}e^{\lambda t} \quad (147)$$

in cui λ e \mathbf{y} sono rispettivamente uno scalare e un vettore costante di dimensione $2n \times 1$ che dovranno essere determinati.

Sostituendo la soluzione (147) e la sua derivata prima nel sistema (146) e semplificando il termine esponenziale $e^{\lambda t}$, si ottiene con semplici passaggi:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \quad (148)$$

La (148) mostra chiaramente che si è ottenuto un problema agli autovalori-autovettori: infatti gli scalari λ e i vettori \mathbf{y} che soddisfano la (148) sono rispettivamente gli autovalori e gli autovettori della matrice di stato \mathbf{A} .

Una forma equivalente della (148) è la seguente:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (149)$$

²⁰Si ricordi che, in generale, per un sistema dinamico descritto da equazioni differenziali di ordine m , lo *stato del sistema* è univocamente definito quando sono noti il vettore delle variabili indipendenti ed i vettori delle derivate temporali di tali variabili fino all'ordine $m - 1$. I problemi di meccanica delle vibrazioni, a uno o più gradi di libertà, sono problemi di dinamica in cui le equazioni differenziali risultano sempre del secondo ordine ($m = 2$). Pertanto lo stato di un sistema meccanico risulta definito quando si assegnano il vettore delle posizioni \mathbf{x} e quello delle velocità $\dot{\mathbf{x}}$.

in cui i simboli $\mathbf{0}$ e \mathbf{I} vengono ora usati per indicare rispettivamente il vettore nullo e la matrice identità di dimensione $2n$.

Per ottenere una soluzione non banale del sistema omogeneo (149) si deve imporre, come di consueto, la condizione di annullamento del determinante:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (150)$$

Procedendo in questo modo, però, nascono di nuovo i noti problemi: difficoltà a sviluppare simbolicamente il determinante e necessità di risolvere un'equazione caratteristica (derivante dallo sviluppo del determinante) di grado elevato; tale equazione, in particolare, risulta di grado $2n$ e per essa occorre calcolare tutte le soluzioni (reali e complesse). Per il calcolo di ciascun autovettore \mathbf{y}_k ($k = 1, \dots, 2n$) si dovrebbe poi sostituire il corrispondente autovalore λ_k nella (149) e procedere con i calcoli dopo aver stabilito il criterio di normalizzazione degli autovettori, ad esempio ponendo uguale ad 1 una delle componenti dell'autovettore: infatti, come è noto, gli autovettori risultano sempre definiti a meno di una costante arbitraria, poiché si è imposta la condizione di annullamento del determinante (150).

Pertanto, per risolvere il problema agli autovalori-autovettori suddetto, conviene utilizzare apposite funzioni di libreria ormai disponibili in tutti i pacchetti software commerciali per il calcolo scientifico-tecnico; tali funzioni utilizzano algoritmi numerici efficienti, che consentono di calcolare rapidamente gli autovalori e gli autovettori anche per matrici di dimensione elevata. Per approfondimenti sull'argomento, si rimanda a testi di analisi numerica avanzata in cui, oltre alla descrizione degli algoritmi, vengono forniti i corrispondenti codici di calcolo scritti in linguaggio C, utili agli sviluppatori di software.

Giunti a questo punto, supponiamo di aver calcolato gli autovalori e gli autovettori della matrice \mathbf{A} mediante un apposito software di calcolo (per la sintassi dei comandi è necessario consultare la Guida utente del software o la funzione di "help" in linea): la soluzione del sistema di equazioni differenziali (146) si ottiene allora combinando linearmente le $2n$ soluzioni del tipo (147), ovvero:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{2n} C_k \mathbf{y}_k e^{\lambda_k t} \quad (151)$$

Le costanti C_k sono i coefficienti della combinazione lineare e devono essere calcolati mediante le $2n$ condizioni iniziali assegnate (n per le posizioni ed n per le velocità); si avrà quindi:

$$\mathbf{y}(0) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \dot{\mathbf{x}}(0) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{2n} C_k \mathbf{y}_k \quad (152)$$

Per comodità possiamo riscrivere la (152) nella forma equivalente

$$\mathbf{Y}\mathbf{c} = \mathbf{y}(0) \quad (153)$$

dove i simboli \mathbf{Y} e \mathbf{c} indicano rispettivamente la matrice degli autovettori e il vettore delle costanti C_k , definiti nel modo seguente:

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \dots \mathbf{y}_{2n}] \quad \mathbf{c} = \{C_1 C_2 \dots C_{2n}\}^T \quad (154)$$

Risolvendo il sistema lineare (153) si ricavano i coefficienti C_k :

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{2n} \end{Bmatrix} = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{y}(0) \quad (155)$$

Si osservi che, risolvendo il problema mediante il vettore di stato, vengono contemporaneamente calcolati il vettore degli spostamenti $\mathbf{x}(t)$ e il vettore delle velocità $\dot{\mathbf{x}}(t)$; derivando rispetto al tempo il vettore di stato (calcolato mediante la (151)) si ottengono nuovamente le velocità nella parte superiore, mentre la parte inferiore fornisce le accelerazioni: traducendo in espressioni matematiche quanto sopra affermato, si ha:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k C_k \mathbf{y}_k e^{\lambda_k t} \quad (156)$$

Procedendo in modo analogo è possibile calcolare facilmente le derivate temporali di qualsiasi ordine.

Esempio 1

Per il sistema vibrante a due gradi di libertà rappresentato in Figura 13, calcolare il movimento delle due masse utilizzando: a) il metodo descritto nel paragrafo 9.1; b) il metodo descritto nel paragrafo 9.2.

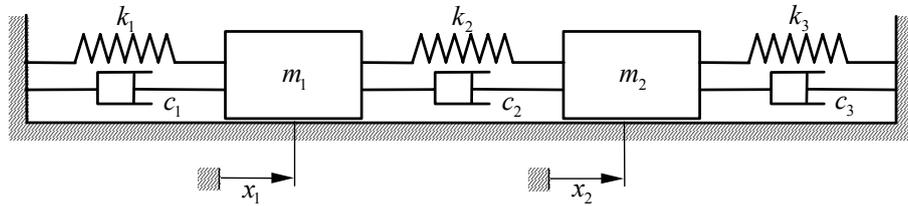


Figura 15: Sistema a due gradi di libertà con smorzamento.

Dati

- Masse $m_1 = 4 \text{ kg}$ $m_2 = 6 \text{ kg}$
- Rigidezze $k_1 = 2500 \text{ N/m}$ $k_2 = 1500 \text{ N/m}$ $k_3 = 1000 \text{ N/m}$
- Costanti di smorzamento $c_1 = 15 \text{ Ns/m}$ $c_2 = 20 \text{ Ns/m}$ $c_3 = 40 \text{ Ns/m}$
- Condizioni iniziali (posizione) $x_1(0) = 0.05 \text{ m}$ $x_2(0) = 0.04 \text{ m}$
- Condizioni iniziali (velocità) $\dot{x}_1(0) = 0.2 \text{ m/s}$ $\dot{x}_2(0) = 0.25 \text{ m/s}$

Soluzione

Per utilizzare il metodo descritto nel paragrafo 9.1 occorre in primo luogo calcolare i coefficienti dell'equazione caratteristica utilizzando le relazioni (120); con i dati assegnati si ottengono i seguenti valori:

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2 + c_3}{m_2} = 18.75 \\
 a_2 &= \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} + \frac{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}{m_1 m_2} = 1487.5 \\
 a_1 &= \frac{c_1(k_2 + k_3) + c_2(k_1 + k_3) + c_3(k_1 + k_2)}{m_1 m_2} = 11145.8 \\
 a_0 &= \frac{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{m_1 m_2} = 322916.7
 \end{aligned}
 \tag{E.1}$$

L'equazione caratteristica da risolvere è quindi:

$$\lambda^4 + 18.75\lambda^3 + 1487.5\lambda^2 + 11145.8\lambda + 322916.7 = 0
 \tag{E.2}$$

e le sue radici si possono ottenere per via analitica, oppure mediante appositi algoritmi di calcolo numerico attualmente implementati in numerosi pacchetti software commerciali per il calcolo tecnico scientifico.

Le quattro radici del polinomio [E.2] sono:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -5.916 + 32.885i & \lambda_2 &= -5.916 - 32.885i \\
 \lambda_3 &= -3.459 + 16.652i & \lambda_4 &= -3.459 - 16.652i
 \end{aligned}
 \tag{E.3}$$

Avendo ottenuto quattro valori complessi e coniugati, possiamo affermare che l'entità dello smorzamento è bassa.

Scriviamo ora la soluzione nella forma (122):

$$x_1(t) = \sum_{k=1}^4 A_k e^{\lambda_k t} \quad x_2(t) = \sum_{k=1}^4 B_k e^{\lambda_k t}
 \tag{E.4}$$

Calcoliamo quindi i rapporti:

$$r_k = p(\lambda_k) = \frac{A_k}{B_k} \quad k = 1, \dots, 4
 \tag{E.5}$$

dove, in base alla (123):

$$p(\lambda) = \frac{k_2 + \lambda c_2}{m_1 \lambda^2 + (c_1 + c_2)\lambda + (k_1 + k_2)} = \frac{1500 + 20\lambda}{4\lambda^2 + 35\lambda + 4000}
 \tag{E.6}$$

Avremo pertanto:

$$\begin{aligned} r_1 = p(\lambda_1) &= \frac{A_1}{B_1} = -2.54 + 0.948i & r_2 = p(\lambda_2) &= \frac{A_2}{B_2} = -2.54 - 0.948i \\ r_3 = p(\lambda_3) &= \frac{A_3}{B_3} = 0.512 + 0.096i & r_4 = p(\lambda_4) &= \frac{A_4}{B_4} = 0.512 - 0.096i \end{aligned} \quad [\text{E.7}]$$

Utilizzando le condizioni iniziali assegnate, possiamo calcolare le costanti B_k mediante la (131); con i dati del problema si ha:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1\lambda_1 & r_2\lambda_2 & r_3\lambda_3 & r_4\lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2.54 + 0.948i & -2.54 - 0.948i & 0.512 + 0.096i & 0.512 - 0.096i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -16.136 - 89.147i & -16.136 + 89.147i & -3.37 + 8.193i & -3.37 - 8.193i \\ -5.916 + 32.885i & -5.916 - 32.885i & -3.459 + 16.652i & -3.459 - 16.652i \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.04 \\ 0.2 \\ 0.25 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.0045 + 1.8456i \times 10^{-4} \\ -0.0045 - 1.8456i \times 10^{-4} \\ 0.0245 - 0.0114i \\ 0.0245 + 0.0114i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad [\text{E.8}]$$

In base alle [E.7] le costanti A_k risultano:

$$\begin{aligned} A_1 &= r_1 B_1 = 0.0113 - 0.0048i \\ A_2 &= r_2 B_2 = 0.0113 + 0.0048i \\ A_3 &= r_3 B_3 = 0.0137 - 0.0035i \\ A_4 &= r_4 B_4 = 0.0137 + 0.0035i \end{aligned} \quad [\text{E.9}]$$

Abbiamo in questo modo calcolato tutte le costanti che compaiono nelle espressioni [E.4] e quindi il problema si può considerare risolto; tuttavia, per rendere più chiara l'espressione analitica delle leggi di movimento $x_1(t)$ e $x_2(t)$, possiamo eliminare le quantità complesse utilizzando la forma (133), che qui riportiamo per comodità:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\alpha_1 t} (p_1 C_1 \cos \omega_{s1} t + p_2 C_2 \sin \omega_{s1} t) + e^{-\alpha_2 t} (p_3 C_3 \cos \omega_{s2} t + p_4 C_4 \sin \omega_{s2} t) \\ x_2(t) &= e^{-\alpha_1 t} (C_1 \cos \omega_{s1} t + C_2 \sin \omega_{s1} t) + e^{-\alpha_2 t} (C_3 \cos \omega_{s2} t + C_4 \sin \omega_{s2} t) \end{aligned} \quad [\text{E.10}]$$

Per il nostro problema le costanti α_1 e α_2 e le pulsazioni proprie smorzate ω_{s1} e ω_{s2} assumono i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 5.916 \text{ s}^{-1} & \omega_{s1} &= 32.885 \text{ rad/s} \\ \alpha_2 &= 3.459 \text{ s}^{-1} & \omega_{s2} &= 16.652 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad [\text{E.11}]$$

Le costanti C_k ($k = 1, \dots, 4$) si calcolano mediante le relazioni indicate in nota a pagina 23 ed assumono i valori sotto indicati:

$$\begin{aligned} C_1 &= B_1 + B_2 = -9.072 \times 10^{-3} \text{ m} \\ C_2 &= i(B_1 - B_2) = -3.691 \times 10^{-4} \text{ m} \\ C_3 &= B_3 + B_4 = 0.049 \text{ m} \\ C_4 &= i(B_3 - B_4) = 0.023 \text{ m} \end{aligned} \quad [\text{E.12}]$$

In base alle [E.7] si ha:

$$\begin{aligned} r_{1,2} = a \pm ib &= -2.54 \pm 0.948i & \Rightarrow & a = -2.54 & b &= 0.948 \\ r_{3,4} = c \pm id &= 0.512 \pm 0.096i & \Rightarrow & c = 0.512 & d &= 0.096 \end{aligned} \quad [\text{E.13}]$$

Calcoliamo infine le costanti p_k ($k = 1, \dots, 4$) utilizzando le (134):

$$\begin{aligned} p_1 &= a + b \frac{C_2}{C_1} = -2.502 & p_2 &= a - b \frac{C_1}{C_2} = -25.831 \\ p_3 &= c + d \frac{C_4}{C_3} = 0.556 & p_4 &= c - d \frac{C_3}{C_4} = 0.304 \end{aligned} \quad [\text{E.14}]$$

Passiamo ora a risolvere il problema con il metodo descritto nel paragrafo 9.2.

Indicando con $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t) x_2(t)\}^T$ il vettore delle coordinate di posizione, le matrici di massa, smorzamento e rigidità per il sistema in esame risultano definite dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad [\text{E.15}]$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & -20 \\ -20 & 60 \end{bmatrix} \quad [\text{E.16}]$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 & -1500 \\ -1500 & 2500 \end{bmatrix} \quad [\text{E.17}]$$

Costruiamo la matrice di stato \mathbf{A} in base alla sua definizione (145):

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1 + c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2 + c_3}{m_2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1000 & 375 & -8.75 & 5 \\ 250 & -416.667 & 3.333 & -10 \end{array} \right] \quad [\text{E.18}]$$

Con i dati assegnati si ottengono i seguenti autovalori per la matrice \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -5.916 + 32.885i & \lambda_2 &= -5.916 - 32.885i \\ \lambda_3 &= -3.459 + 16.652i & \lambda_4 &= -3.459 - 16.652i \end{aligned} \quad [\text{E.19}]$$

che coincidono con le radici del polinomio caratteristico [E.2].

La matrice $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \mathbf{y}_3 \mathbf{y}_4]$ degli autovettori risulta:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -0.00497 - 0.02762i & -0.00497 + 0.02762i & -0.00053 - 0.02711i & -0.00053 + 0.02711i \\ -0.00184 + 0.01019i & -0.00184 - 0.01019i & -0.01059 - 0.05097i & -0.01059 + 0.05097i \\ 0.93781 & 0.93781 & 0.45327 + 0.08502i & 0.45327 - 0.08502i \\ -0.32406 - 0.12089i & -0.32406 + 0.12089i & 0.88536 & 0.88536 \end{bmatrix} \quad [\text{E.20}]$$

e quindi, per ottenere il k -esimo autovettore \mathbf{y}_k , sarà sufficiente estrarre la k -esima colonna della matrice \mathbf{Y} . Utilizzando la (155) si calcolano le costanti C_k ($k = 1, \dots, 4$) contenute nel vettore \mathbf{c} :

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{y}(0) \quad [\text{E.21}]$$

dove:

$$\mathbf{Y}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.08531 + 15.52949i & 0.18846 - 8.2101i & 0.45907 + 0.03009i & -0.23213 - 0.10436i \\ 1.08531 - 15.52949i & 0.18846 + 8.2101i & 0.45907 - 0.03009i & -0.23213 + 0.10436i \\ -1.72314 + 2.78479i & 1.18998 + 8.42302i & 0.16392 + 0.05667i & 0.49403 + 0.07337i \\ -1.72314 - 2.78479i & 1.18998 - 8.42302i & 0.16392 - 0.05667i & 0.49403 - 0.07337i \end{bmatrix} \quad [\text{E.22}]$$

$$\mathbf{y}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.05 \\ 0.04 \\ 0.2 \\ 0.25 \end{Bmatrix} \quad [\text{E.23}]$$

Svolgendo i calcoli si ricavano i seguenti valori numerici:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.0956 + 0.428i & C_2 &= 0.0956 - 0.428i \\ C_3 &= 0.1177 + 0.5058i & C_4 &= 0.1177 - 0.5058i \end{aligned} \quad [\text{E.24}]$$

La soluzione è quindi:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 C_k \mathbf{y}_k e^{\lambda_k t} \quad [\text{E.25}]$$

I grafici di Figura 16 mostrano l'andamento nel tempo delle posizioni e delle velocità delle due masse.

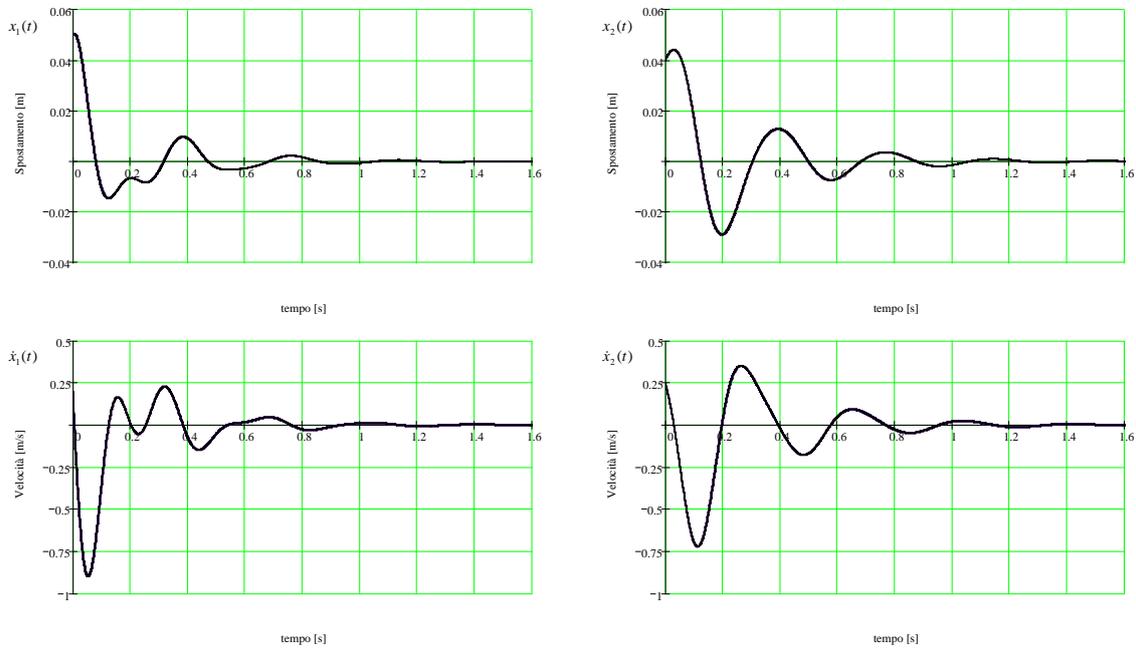


Figura 16: Andamento temporale dello spostamento e della velocità delle due masse per il sistema vibrante rappresentato in Figura 13.