

Vibrazioni di sistemi ad un grado di libertà con forzante armonica

1 Introduzione

Lo scopo del presente capitolo è quello di illustrare i metodi per lo studio del comportamento dinamico di sistemi ad un solo grado di libertà sottoposti ad una causa eccitatrice (detta *forzante*) di natura sinusoidale.

Come vedremo, tale eccitazione può essere generata da una forza direttamente applicata alla massa, da una massa squilibrata rotante a velocità costante oppure dal moto armonico di un vincolo mobile: si tratta di situazioni che si verificano frequentemente durante il funzionamento delle macchine e pertanto è necessario dedicare al loro studio particolare attenzione.

Nel corso della trattazione si mostrerà che, a transitorio esaurito, il sistema vibrante si muove anch'esso con legge sinusoidale e con frequenza identica a quella della causa eccitatrice.

Verrà infine introdotto il concetto di *risonanza*, fenomeno fisico che si verifica quando la frequenza dell'azione forzante coincide o è molto vicina a quella naturale del sistema; in condizioni di risonanza si ha una notevole amplificazione dell'ampiezza di vibrazione, che può portare a situazioni di malfunzionamento o addirittura di cedimento degli organi meccanici del sistema meccanico.

2 Vibrazioni dovute a forzante impressa: caso non smorzato

Iniziamo lo studio delle vibrazioni forzate dovute ad una forzante sinusoidale considerando il sistema privo di smorzamento rappresentato in Figura 1. Si tenga presente che la forza deve essere applicata senza imporre lo spostamento alla massa m (utilizzando ad esempio un fluido in pressione o un campo magnetico).

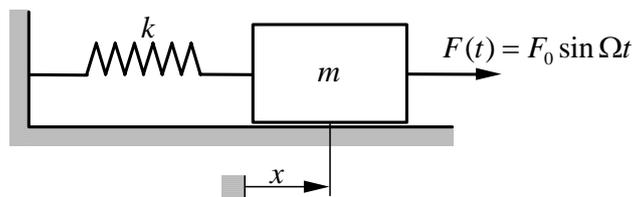


Figura 1: Oscillatore ad grado di libertà privo di smorzamento e soggetto ad una forzante sinusoidale.

L'equazione di moto di tale sistema è la seguente:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \Omega t \quad (1)$$

dove il simbolo Ω indica la pulsazione della forzante.

Poiché l'equazione (1) non è omogenea, la sua soluzione $x(t)$ è data dalla somma di due termini: la soluzione generale $x_h(t)$ dell'equazione omogenea associata e la soluzione particolare $x_p(t)$ dell'equazione completa:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2)$$

L'equazione omogenea associata si ottiene, come è noto, dalla (1) ponendo uguale a zero il termine forzante: la sua soluzione è stata ricavata nel capitolo precedente ed assume la forma:

$$x_h(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3)$$

dove $\omega = \sqrt{k/m}$ indica la pulsazione propria del sistema vibrante. La teoria delle equazioni differenziali lineari afferma che, quando è presente un termine forzante di tipo “seno” o “coseno”, anche la soluzione particolare $x_p(t)$ è di tipo “seno” o “coseno” con la stessa pulsazione del termine forzante¹: pertanto possiamo scrivere:

$$x_p(t) = X \sin \Omega t \quad (4)$$

dove X è una costante incognita (positiva o negativa) che rappresenta la massima l'ampiezza (spostamento) di x_p .

Sostituendo la soluzione (4) e la sua derivata seconda nell'equazione differenziale (1), semplificando i termini sinusoidali e risolvendo rispetto ad X , si ottiene:

$$X = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \quad (5)$$

Dopo aver determinato l'ampiezza massima di vibrazione X , la soluzione particolare (4) è completamente nota; possiamo quindi procedere con il calcolo della soluzione completa.

A tale scopo utilizziamo l'equazione (2) e sostituiamo in essa le soluzioni $x_h(t)$ e $x_p(t)$ date dalle (3) e (4):

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + X \sin \Omega t \quad (6)$$

Per calcolare le costanti A e B occorre conoscere le condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, che esprimono rispettivamente i valori dello spostamento e della velocità della massa m all'istante $t = 0$.

Applicando la condizione sullo spostamento si ottiene immediatamente:

$$x(0) = A = x_0 \quad (7)$$

Per applicare la condizione sulla velocità occorre prima calcolare la derivata della (6), che risulta:

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t + \Omega X \cos \Omega t \quad (8)$$

All'istante $t = 0$ si ha:

$$\dot{x}(0) = \omega B + \Omega X = \dot{x}_0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{\omega}(\dot{x}_0 - \Omega X) \quad (9)$$

Sostituendo nella (6) i valori delle costanti A e B sopra determinati e riordinando i termini si ottiene l'espressione seguente:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + X[\sin \Omega t - (\Omega/\omega) \sin \omega t] \quad (10)$$

Riprendiamo ora in esame l'espressione (5) che fornisce l'ampiezza di oscillazione della soluzione particolare. Si osservi che, per un'assegnata frequenza eccitatrice, X cresce linearmente con F_0 ; ciò significa che, a parità di frequenza, se l'intensità della forzante viene amplificata di un fattore α , anche l'ampiezza di vibrazione X della soluzione particolare sarà amplificata dello stesso fattore α .

Dividendo per k il numeratore ed il denominatore della frazione al secondo membro della (5) e ricordando che $\omega = \sqrt{k/m}$, si ha:

$$X = \frac{F_0/k}{1 - (\Omega/\omega)^2} \quad (11)$$

Ponendo ora $\delta_{st} = F_0/k$ e $r = \Omega/\omega$ l'equazione (11) può essere riscritta nella forma:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - r^2} \quad (12)$$

Il rapporto r fra la pulsazione Ω della forzante e la pulsazione propria ω dell'oscillatore è detto *rapporto di frequenza*, mentre la quantità indicata con simbolo δ_{st} rappresenta la deformazione che la molla subirebbe sotto l'effetto di una forza applicata *staticamente*, ovvero sotto l'effetto di una forza che non varia nel tempo con legge armonica, ma si mantiene costante nel tempo con valore pari ad F_0 ; per questo motivo lo spostamento δ_{st} viene solitamente definito *deformazione statica*.

L'equazione (12) fornisce il rapporto fra l'ampiezza massima X di oscillazione in condizioni dinamiche (cioè sotto l'effetto di una forzante sinusoidale) e la deformazione statica: la funzione al secondo membro della (12)

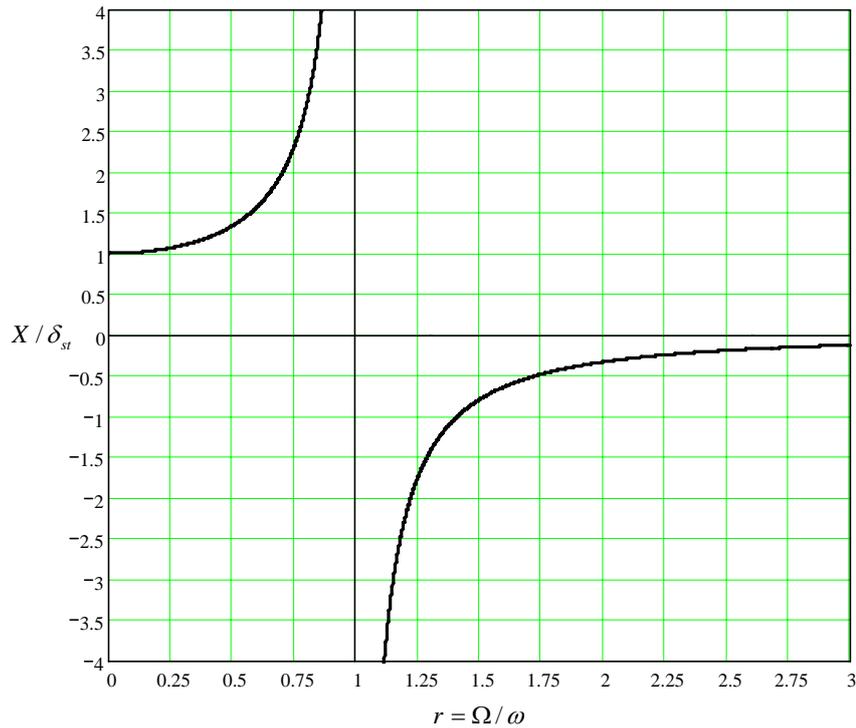


Figura 2: Fattore di amplificazione dinamica in funzione del rapporto $r = \Omega/\omega$.

è denominata *fattore di amplificazione dinamica* e dipende dalla pulsazione della causa eccitatrice, o meglio dal rapporto di frequenza r ; l'andamento di tale funzione al variare di r è mostrato nel diagramma di Figura 2.

Osservando il grafico, si nota che si hanno differenti comportamenti del sistema a seconda del valore assunto dalla pulsazione della forzante:

Caso n.1: bassa frequenza. Per $0 < r < 1$ il denominatore della frazione al secondo membro della (12) è positivo e quindi il rapporto X/δ_{st} (detto *ampiezza adimensionale*) è anch'esso positivo. La risposta armonica del sistema x_p è in fase con la forzante, come mostrato in Figura 3a. Se la pulsazione della forzante è molto bassa il rapporto X/δ_{st} è prossimo all'unità e pertanto l'ampiezza di vibrazione è circa uguale a δ_{st} .

Caso n.2: alta frequenza. Per $r > 1$ il denominatore della frazione al secondo membro della (12) è negativo e quindi è negativo anche il rapporto X/δ_{st} . Pertanto la risposta armonica del sistema x_p è in controfase (ovvero sfasata di 180°) con la forzante, come mostrato in Figura 3b. Se la pulsazione della forzante è molto alta il rapporto X/δ_{st} tende a zero: ciò significa che il sistema tende a non vibrare quando viene eccitato con una forzante a frequenza elevata.

Caso n.3: risonanza. Per $r = 1$ il denominatore della frazione al secondo membro della (12) si annulla e pertanto il rapporto X/δ_{st} tende all'infinito. È questa la condizione di risonanza, che si verifica quando la pulsazione della forzante è uguale alla pulsazione propria dell'oscillatore. Quando un sistema vibrante opera in condizioni di risonanza l'ampiezza di vibrazione diviene molto grande (teoricamente infinita nel caso di smorzamento nullo). Si tratta quindi di una situazione di pericolo, che può determinare la rottura o il danneggiamento dei componenti del sistema. Nel seguito della trattazione torneremo sul concetto di risonanza: in particolare si dimostrerà che, per ottenere un'ampiezza di vibrazione molto grande (teoricamente infinita), occorre un tempo altrettanto grande (teoricamente infinito). Pertanto, se è necessario attraversare la condizione di risonanza, è importante che ciò avvenga rapidamente, in modo tale da evitare che la frequenza della causa eccitatrice permanga per troppo tempo su valori prossimi a quello della frequenza propria del sistema.

¹Per le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti la soluzione particolare è sempre di tipo identico a quello della forzante: pertanto se la forzante è rappresentata da un polinomio di grado n , oppure da una funzione esponenziale, anche le corrispondenti soluzioni particolari saranno rispettivamente un polinomio di grado n o una funzione esponenziale.

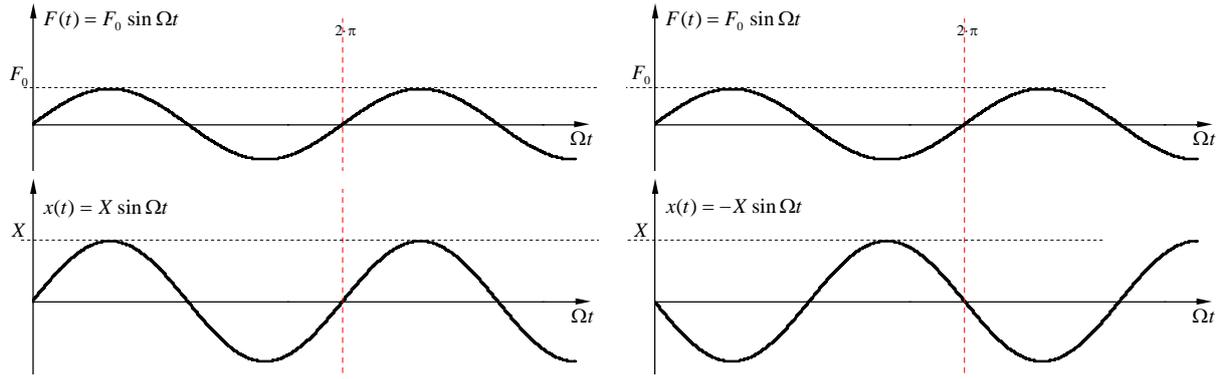


Figura 3: Andamento della forza $F(t)$ e dello spostamento $x_p(t)$ in funzione del tempo: a) sinusoidi in fase ($0 < r < 1$); b) sinusoidi in controfase ($r > 1$).

Per evidenziare meglio le relazioni di fase fra lo spostamento e la forzante è conveniente indicare l'ampiezza di vibrazione X in valore assoluto (modulo) ed introdurre uno sfasamento φ che assume valore nullo per $0 < r < 1$ ed un valore di 180° (π radianti) per $r > 1$.

Operando in questo modo, la soluzione particolare $x_p(t)$ viene ridefinita nel modo seguente:

$$x(t) = |X| \sin(\Omega t - \varphi) \quad (13)$$

in cui

$$|X| = \frac{F_0}{|k - m\Omega^2|} = \frac{\delta_{st}}{|1 - r^2|} \quad \varphi = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < r < 1 \\ \pi & \text{per } r > 1 \end{cases} \quad (14)$$

L'andamento dell'ampiezza adimensionale (in modulo) e dello sfasamento in funzione del rapporto di frequenza r sono rappresentati nei diagrammi di Figura 4, che sostituiscono quello di Figura 2. Tali grafici forniscono una rappresentazione grafica della *risposta in frequenza* del sistema.

2.1 Oscillatore non smorzato in condizione di risonanza

Un discorso più approfondito merita la situazione, detta di *risonanza*, in cui la pulsazione Ω della causa eccitatrice coincide con la pulsazione propria ω del sistema; in questo caso, infatti, l'ampiezza di vibrazione X della soluzione particolare risulta teoricamente infinita.

Per calcolare la risposta dell'oscillatore in condizioni di risonanza occorre innanzitutto considerare la soluzione completa dell'equazione di moto, fornita dalla (10), che qui riscriviamo, sostituendo ad X la sua espressione in funzione del rapporto Ω/ω data dalla (11):

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{\delta_{st}}{1 - (\Omega/\omega)^2} [\sin \Omega t - (\Omega/\omega) \sin \omega t] \quad (15)$$

Ricordando che $\Omega = r\omega$ la soluzione può essere riscritta nella forma

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \delta_{st} \left[\frac{\sin r\omega t - r \sin \omega t}{1 - r^2} \right] \quad (16)$$

Poiché in condizioni di risonanza ($r = 1$) il termine fra parentesi quadre nell'equazione (16) è indeterminato, applichiamo la regola di De l'Hospital per calcolare il limite del termine suddetto:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\sin r\omega t - r \sin \omega t}{1 - r^2} &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dr} (\sin r\omega t - r \sin \omega t)}{\frac{d}{dr} (1 - r^2)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\omega t \cos r\omega t - \sin \omega t}{-2r} = \frac{1}{2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) \end{aligned} \quad (17)$$

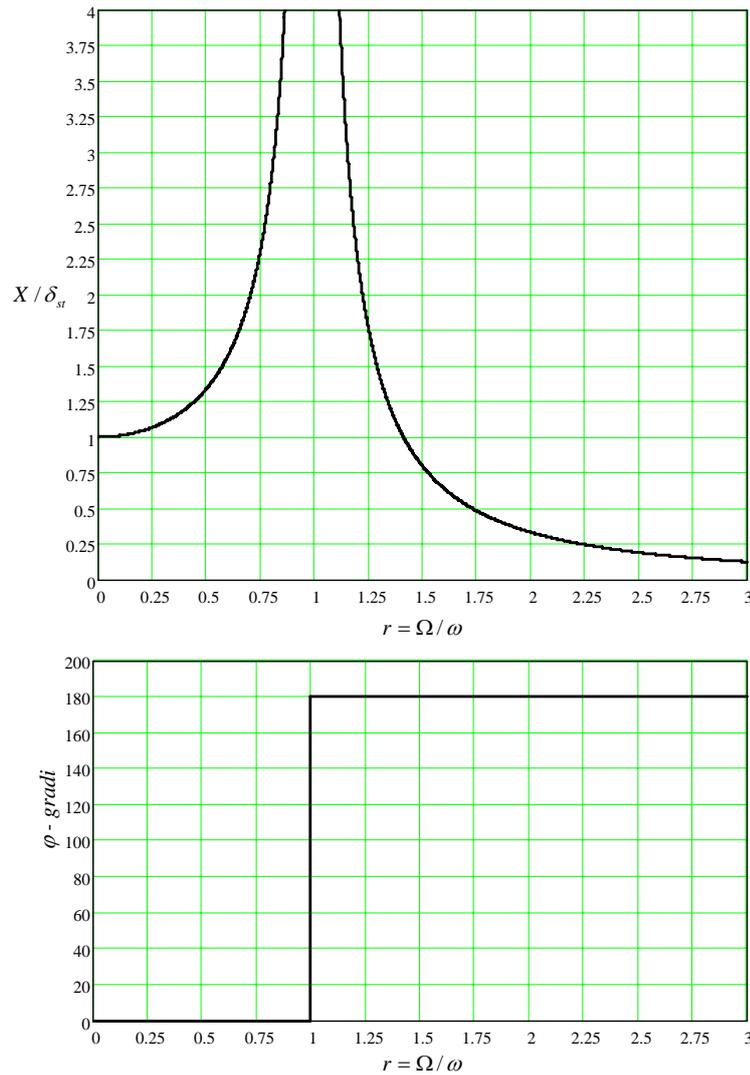


Figura 4: Ampiezza adimensionale (in modulo) e sfasamento in funzione del rapporto $r = \Omega/\omega$.

Sostituendo il risultato sopra calcolato nella (16) e riordinando i termini, si ottiene l'andamento temporale dello spostamento x in condizioni di risonanza:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{\delta_{st}}{2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) \tag{18}$$

Si osservi che nella (18) l'ultimo termine è dato dal prodotto della funzione $\cos \omega t$ per la quantità ωt che aumenta con legge lineare all'aumentare del tempo; tutti gli altri termini rimangono invece limitati nel tempo, in quanto derivano dal prodotto di una funzione armonica per una costante. Il termine $\omega t \cos \omega t$ (detto *termine espansivo*) fa aumentare continuamente l'ampiezza di vibrazione all'aumentare del tempo: è quindi chiaro che, per ottenere un'ampiezza di vibrazione infinita, è necessario un tempo infinito.

Nel caso particolare in cui lo spostamento e la velocità iniziale siano entrambi nulli si ha:

$$x(t) = \frac{\delta_{st}}{2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) \tag{19}$$

La rappresentazione grafica della (19), è riportata in Figura 5; si osservi che l'ampiezza di vibrazione cresce indefinitamente nel tempo con andamento lineare: il diagramma è infatti inviluppato da due rette, passanti per l'origine, di equazione $f(t) = \pm \frac{\delta_{st}\omega}{2} t$.

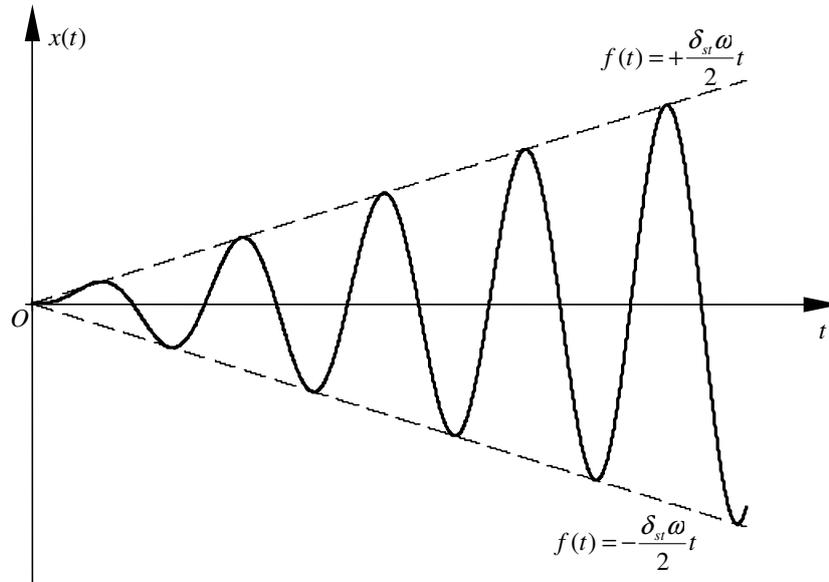


Figura 5: Andamento delle vibrazioni in condizioni di risonanza; il diagramma è stato calcolato per $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$.

La dimostrazione matematica sopra riportata mostra chiaramente come la permanenza della frequenza eccitatrice su valori prossimi a quello di risonanza porti ad un progressivo aumento dell'ampiezza di vibrazione; tuttavia, se la frequenza della forzante rimane per un tempo limitato intorno al valore di risonanza, l'ampiezza della vibrazione non riesce ad aumentare in modo apprezzabile: quindi è possibile attraversare la condizione di risonanza senza provocare danni al sistema meccanico.

In altri termini, la condizione di risonanza, pur essendo pericolosa, può essere attraversata senza particolari problemi, a patto che ciò avvenga rapidamente, in modo tale da evitare che l'ampiezza di vibrazione superi il valore ammissibile. Questa regola pratica deve essere tenuta in particolare considerazione durante i transitori di avviamento e di arresto di una macchina, in quanto durante tali operazioni la pulsazione della forzante varia nel tempo² e quindi, in particolari istanti, può uguagliare la pulsazione propria del sistema vibrante.

3 Vibrazioni armoniche con forzante impressa: caso smorzato

In questo paragrafo viene analizzato il moto di un oscillatore lineare soggetto ad una forza eccitatrice $F(t) = F_0 \sin \Omega t$ agente sulla massa m . (vedi Figura 6).

L'equazione di moto del sistema è la seguente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \Omega t \quad (20)$$

Anche in questo caso la soluzione completa dell'equazione di moto si ottiene sommando la soluzione dell'equazione omogenea $x_h(t)$ con la soluzione particolare $x_p(t)$; la soluzione dell'equazione omogenea si ricava con il procedimento descritto nel capitolo precedente, nel paragrafo dedicato alle vibrazioni libere smorzate. Si è visto che l'espressione di $x_h(t)$ assume forme differenti a seconda che il sistema sia sottosmorzato, sovrasmorzato o in condizioni di smorzamento critico. In tutti i casi, però, la presenza dello smorzamento fa tendere a zero la

²Nel caso tipico di vibrazioni dovute a massa rotante eccentrica la pulsazione della forzante coincide con la velocità di rotazione dell'albero su cui è montato il rotore squilibrato. Quindi, durante l'avviamento e l'arresto, è necessario verificare che la velocità per cui si ha risonanza (detta *velocità critica*) venga rapidamente superata. Se la macchina è azionata da un motore elettrico, il transitorio di avviamento è solitamente molto rapido ed il passaggio attraverso la velocità critica non dà particolari problemi; maggiore attenzione occorre invece prestare al transitorio di arresto, soprattutto quando la macchina viene spenta togliendo tensione al motore elettrico, senza utilizzare un freno e lasciando che la velocità si porti a zero per effetto delle resistenze passive (attrito dei cuscinetti, resistenza dell'aria, ecc.). In questo caso il transitorio di arresto può essere molto lento e pertanto l'attraversamento della velocità critica non può avvenire con la rapidità richiesta: si avrà allora un fenomeno di risonanza, con conseguente amplificazione dei fenomeni vibratorii.

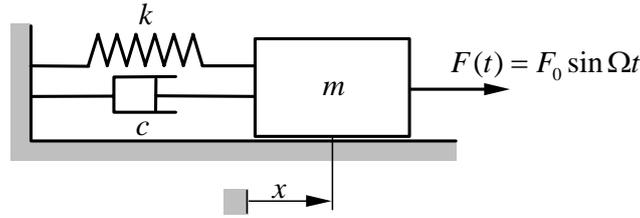


Figura 6: Oscillatore ad grado di libertà con smorzamento e soggetto ad una forzante sinusoidale.

soluzione dell'equazione omogenea per $t \rightarrow \infty$; ciò significa che dopo un certo intervallo temporale, la soluzione dell'equazione differenziale dipenderà unicamente dalla soluzione particolare.

In altri termini, negli istanti immediatamente successivi al tempo $t = 0$ di inizio del movimento, le vibrazioni del sistema sono sensibilmente influenzate dalla soluzione $x_h(t)$ (comportamento in transitorio); negli istanti seguenti, quando lo smorzamento ha reso trascurabile il contributo della soluzione $x_h(t)$, la vibrazione è definita unicamente dalla soluzione particolare $x_p(t)$ (comportamento a regime).

Chiaramente l'entità dello smorzamento determina la durata del transitorio: sistemi debolmente smorzati hanno transitori più lunghi, mentre sistemi con smorzamento più elevato hanno transitori più brevi; nei casi in cui lo smorzamento è elevato è molto difficile individuare l'intervallo temporale in cui si manifesta la vibrazione transitoria, poiché il sistema raggiunge rapidamente la condizione di regime.

Anche nel caso smorzato la soluzione particolare dell'equazione di moto è un moto armonico avente la stessa pulsazione Ω della forzante: potremo quindi scrivere:

$$x_p(t) = X \sin(\Omega t - \varphi) \quad (21)$$

dove X e φ rappresentano rispettivamente l'ampiezza massima di vibrazione nel moto a regime e lo sfasamento dello spostamento rispetto alla forzante. L'ampiezza X viene sempre considerata positiva e quindi diviene superfluo il simbolo di valore assoluto che avevamo introdotto nella (13).

3.1 Calcolo di X e φ mediante le relazioni trigonometriche

Per calcolare X e φ occorre in primo luogo sostituire la (21) e le sue derivate prima e seconda nell'equazione di moto (20); operando in tal modo si ottiene:

$$-m\Omega^2 X \sin(\Omega t - \varphi) + c\Omega X \cos(\Omega t - \varphi) + kX \sin(\Omega t - \varphi) = F_0 \sin \Omega t \quad (22)$$

Raccogliendo al primo membro i termini in seno e coseno si ha:

$$(k - m\Omega^2)X \sin(\Omega t - \varphi) + c\Omega X \cos(\Omega t - \varphi) = F_0 \sin \Omega t \quad (23)$$

Utilizzando le relazioni trigonometriche che esprimono il seno ed il coseno della differenza di due angoli³, si perviene all'espressione seguente:

$$X[(k - m\Omega^2)(\sin \Omega t \cos \varphi - \cos \Omega t \sin \varphi) + c\Omega(\cos \Omega t \cos \varphi + \sin \Omega t \sin \varphi)] = F_0 \sin \Omega t \quad (24)$$

Raccogliendo ora i termini $\sin \Omega t$ e $\cos \Omega t$ si ricava:

$$X[(k - m\Omega^2) \cos \varphi + c\Omega \sin \varphi] \sin \Omega t - X[(k - m\Omega^2) \sin \varphi - c\Omega \cos \varphi] \cos \Omega t = F_0 \sin \Omega t \quad (25)$$

Affinché l'equazione (25) sia valida, è necessario che i coefficienti dei termini $\cos \Omega t$ e $\sin \Omega t$ presenti in entrambi i membri dell'equazione siano uguali; pertanto:

$$\begin{cases} X[(k - m\Omega^2) \cos \varphi + c\Omega \sin \varphi] = F_0 \\ X[(k - m\Omega^2) \sin \varphi - c\Omega \cos \varphi] = 0 \end{cases} \quad (26)$$

³Le relazioni da utilizzare sono le seguenti:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Abbiamo così ottenuto un sistema di due equazioni nelle due incognite X e φ . Ponendo per semplicità $a = k - m\Omega^2$ e $b = c\Omega$, il sistema (26) può essere riscritto nel modo seguente:

$$\begin{cases} X(a \cos \varphi + b \sin \varphi) = F_0 \\ X(a \sin \varphi - b \cos \varphi) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Per ricavare l'ampiezza X del moto a regime è sufficiente elevare al quadrato le due equazioni del sistema e sommare membro a membro, ottenendo:

$$X^2(a \cos \varphi + b \sin \varphi)^2 + X^2(a \sin \varphi - b \cos \varphi)^2 = F_0^2 \quad (28)$$

Sviluppando i quadrati ed effettuando le dovute semplificazioni, si ricava:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \quad (29)$$

Dalla seconda equazione del sistema (27), dividendo per $\cos \varphi$ si ricava immediatamente:

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan \left(\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \right) \quad (30)$$

Si osservi che il procedimento adottato è piuttosto laborioso; per semplificare i calcoli è meglio utilizzare il metodo basato sull'algebra complessa, che verrà descritto nel paragrafo seguente.

3.2 Calcolo di X e φ mediante l'algebra complessa

Mediante l'utilizzo dell'algebra complessa è possibile ottenere più rapidamente le espressioni dell'ampiezza di vibrazione X e dello sfasamento φ in condizioni di regime.

Per applicare questo metodo di calcolo occorre in primo luogo riscrivere l'equazione di moto (20) sostituendo la forzante $F_0 \sin \Omega t$ con la forzante complessa $F_0 e^{i\Omega t}$; operando in questo modo si ottiene:

$$m\ddot{\bar{x}} + c\dot{\bar{x}} + k\bar{x} = F_0 e^{i\Omega t} \quad (31)$$

dove il trattino sopra la x e le sue derivate indica che l'incognita è ora una grandezza complessa. Osserviamo subito che la forzante che effettivamente agisce sulla massa m è la parte immaginaria del numero complesso $F_0 e^{i\Omega t}$, ovvero:

$$F_0 \sin \Omega t = \text{Im}(F_0 e^{i\Omega t}) \quad (32)$$

Pertanto la soluzione effettiva dell'equazione di moto si ottiene risolvendo l'equazione (31) nel campo complesso e considerandone la parte immaginaria⁴:

Per l'equazione (31) assumiamo come soluzione particolare:

$$\bar{x}_p(t) = \bar{X} e^{i\Omega t} \quad (33)$$

dove la quantità \bar{X} , detta *ampiezza complessa*, ha modulo X e fase $-\varphi$; si avrà quindi⁵:

$$\bar{X} = X e^{-i\varphi} \quad (34)$$

L'ampiezza e la fase dipendono dai parametri fisici del sistema (massa, rigidità, coefficiente di smorzamento), oltre che dalla pulsazione della forzante, e possono essere determinate sostituendo la (33) e le sue derivate nell'equazione (31); con semplici passaggi si ottiene:

$$[-m\Omega^2 + ci\Omega + k] \bar{X} e^{i\Omega t} = F_0 e^{i\Omega t} \quad (35)$$

⁴Se la forzante viene espressa tramite la funzione coseno si avrà:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

Poiché $F_0 \cos \Omega t = \text{Re}(F_0 e^{i\Omega t})$, la soluzione si otterrà considerando la *parte reale* della soluzione complessa dell'equazione (31). Possiamo quindi scrivere:

$$x_p(t) = \text{Re}[\bar{x}_p(t)] = X \cos(\Omega t - \varphi)$$

⁵Nel moto forzato a regime dei sistemi vibranti ad un grado di libertà lo spostamento $x(t)$ è sempre in ritardo rispetto alla forzante $F(t)$: pertanto lo sfasamento tra le sinusoidi corrispondenti alle due grandezze è negativo; per questo motivo è stato evidenziato il segno "meno" davanti all'angolo di fase.

Semplificando il termine $e^{i\Omega t}$, presente in entrambi i membri dell'equazione, si ricava:

$$\bar{X} = \frac{F_0}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega} \quad (36)$$

Dalla (36), utilizzando le note regole dell'algebra complessa, è immediato ricavare le espressioni dell'ampiezza e della fase:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \quad (37)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}\right) \quad (38)$$

Ovviamente i risultati sono identici a quelli ottenuti utilizzando il metodo basato sulle relazioni trigonometriche (vedi formule (29) e (30)).

La soluzione complessa $\bar{x}_p(t)$ è ora completamente nota, in quanto l'ampiezza X e la fase φ sono state sopra calcolate; in base alle (33) e (34) possiamo allora scrivere:

$$\bar{x}_p(t) = X e^{i(\Omega t - \varphi)} = X [\cos(\Omega t - \varphi) + i \sin(\Omega t - \varphi)] \quad (39)$$

La soluzione effettiva, come già detto, sarà data dalla parte immaginaria dell'equazione (39), ovvero:

$$x_p(t) = \text{Im}[\bar{x}_p(t)] = X \sin(\Omega t - \varphi) \quad (40)$$

3.3 Risposta in frequenza

Le espressioni (37) e (38) forniscono l'andamento dell'ampiezza e dello sfasamento (in condizioni di regime) al variare della pulsazione della forzante e pertanto definiscono la risposta in frequenza dell'oscillatore smorzato nel caso di forzante direttamente applicata alla massa.

Una rappresentazione più significativa della risposta in frequenza si ottiene utilizzando grandezze adimensionali, ovvero riferendo l'ampiezza di vibrazione X al valore statico δ_{st} e considerando il rapporto di frequenza r in luogo della pulsazione della forzante (un'operazione analoga è già stata effettuata per il caso non smorzato); inoltre il fattore adimensionale di smorzamento ξ può sostituire la costante di smorzamento c . In questo modo si ottengono formule e rappresentazioni grafiche standardizzate, di uso generale e facilmente utilizzabili dall'utente.

Le operazioni da effettuare per esprimere la risposta in frequenza in termini di grandezze adimensionali sono di tipo puramente algebrico e vengono qui riassunte in modo sintetico (lo sviluppo dei calcoli è lasciato al lettore):

- dividere per k il numeratore ed il denominatore delle frazioni al secondo membro delle espressioni (37) e (38);
- introdurre le relazioni: $\omega = \sqrt{k/m}$; $\xi = c/2m\omega$; $\delta_{st} = F_0/k$; $r = \Omega/\omega$.

Dopo alcuni passaggi si perviene al seguente risultato⁶:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (41)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\xi r}{1 - r^2}\right) \quad (42)$$

Come abbiamo già avuto modo di vedere per il caso non smorzato (vedi paragrafo 2), il rapporto X/δ_{st} (detto fattore di *amplificazione dinamica*) e l'angolo di fase φ dipendono dal rapporto di frequenza r . La presenza dello

⁶Operando in modo analogo sulla (36) si ricava

$$\bar{X} = \frac{1}{(1 - r^2) + i2\xi r} \equiv H(i\omega)$$

dove $H(i\omega)$ viene definita *risposta in frequenza complessa* del sistema (Il simbolo \equiv viene qui utilizzato con il significato di "uguale per definizione"). Chiaramente risultano valide le seguenti relazioni:

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{X}{\delta_{st}} \quad \arg[H(i\omega)] = -\arctan\left(\frac{2\xi r}{1 - r^2}\right) = -\varphi$$

smorzamento, però, introduce anche una dipendenza dal fattore adimensionale di smorzamento ξ : per ottenere una rappresentazione grafica di tali funzioni al variare di r occorrerà pertanto assegnare un particolare valore al parametro ξ . I grafici che si ottengono sono rappresentati in Figura 7.

Analizzando la funzione (41) (relativa all'ampiezza adimensionale) ed osservandone il corrispondente grafico possiamo ricavare le seguenti osservazioni:

- in assenza di smorzamento ($\xi = 0$) ed in condizioni di risonanza ($r = 1$) l'ampiezza delle vibrazioni tende all'infinito (questo risultato conferma quanto avevamo già dimostrato nel paragrafo 2 per il caso non smorzato);
- la presenza dello smorzamento riduce l'ampiezza di vibrazione per qualsiasi valore di r ;
- fissato un particolare valore di r , l'ampiezza di vibrazione è tanto più bassa quanto più alto è il fattore di smorzamento.
- il rapporto X/δ_{st} tende al valore unitario a frequenza molto basse, mentre tende a zero a frequenze molto alte; nella zona di risonanza, in cui r assume valori prossimi all'unità, l'amplificazione appare molto evidente (ma solo se lo smorzamento è basso);
- in condizioni di risonanza ($r = 1$) si ha:

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{r=1} = \frac{1}{2\xi} \quad (43)$$

ma tale valore non corrisponde esattamente al massimo del fattore di amplificazione dinamica.

- Il massimo dell'amplificazione si ha in corrispondenza del valore di r che rende minima l'espressione sotto radice che compare al secondo membro della (41); per la ricerca del massimo poniamo quindi la condizione:

$$\frac{d}{dr} [(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2] = 0 \quad (44)$$

Sviluppando i calcoli e considerando solo la soluzione positiva si ha:

$$r = \sqrt{1 - 2\xi^2} \equiv r_m \quad (45)$$

sostituendo tale valore nella (41) si ricava il valore massimo dell'amplificazione che risulta pari a:

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (46)$$

In base alla (45) il massimo esiste soltanto quando l'espressione sotto radice è positiva, ovvero per $0 < \xi < 1/\sqrt{2}$; si osserva inoltre che l'ascissa del punto di massimo si trova leggermente a sinistra rispetto all'asintoto verticale⁷. Inoltre per $\xi = 1/\sqrt{2}$ il massimo si trova esattamente sull'asse delle ordinate ($r_m = 0$), mentre per $\xi > 1/\sqrt{2}$ l'espressione sotto radice nella (45) è negativa e pertanto l'ascissa del massimo è immaginaria: in questo caso il massimo della funzione non esiste ed il grafico decresce in modo monotono all'aumentare del valore di r .

Passiamo ora ad esaminare la funzione (42) ed il corrispondente grafico; si osserva che:

- per un sistema privo di smorzamento ($\xi = 0$) lo sfasamento è nullo per $0 < r < 1$ e pari 180° per $r > 1$; in altri termini, l'eccitazione e la risposta sono *in fase* per frequenze inferiori a quella di risonanza ed *in controfase* a frequenze superiori a quella di risonanza;
- a prescindere dal valore di smorzamento, se la causa eccitatrice possiede un'elevata frequenza, lo sfasamento tende a 180° ;
- in condizioni di risonanza ed escludendo il caso di smorzamento nullo (per il quale l'angolo di fase assume forma indeterminata), lo sfasamento è pari a 90° , indipendentemente dal fattore di smorzamento; infatti tutte le curve calcolate per differenti valori di ξ passano per il punto di ascissa $r = 1$ ed ordinata $\varphi = 90$.

3.4 Diagrammi vettoriali

Una efficace rappresentazione delle relazioni che intercorrono tra lo spostamento della massa m e le forze agenti su di essa si ottiene tramite il diagramma vettoriale rappresentato in Figura 8, in cui le forze e lo spostamento sono rappresentati tramite vettori rotanti (fasori).

⁷Se lo smorzamento è molto piccolo, il termine ξ^2 è trascurabile e quindi l'ascissa e l'ordinata del massimo risultano:

$$r_m \simeq 1 \quad \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{max} \simeq \frac{1}{2\xi}$$

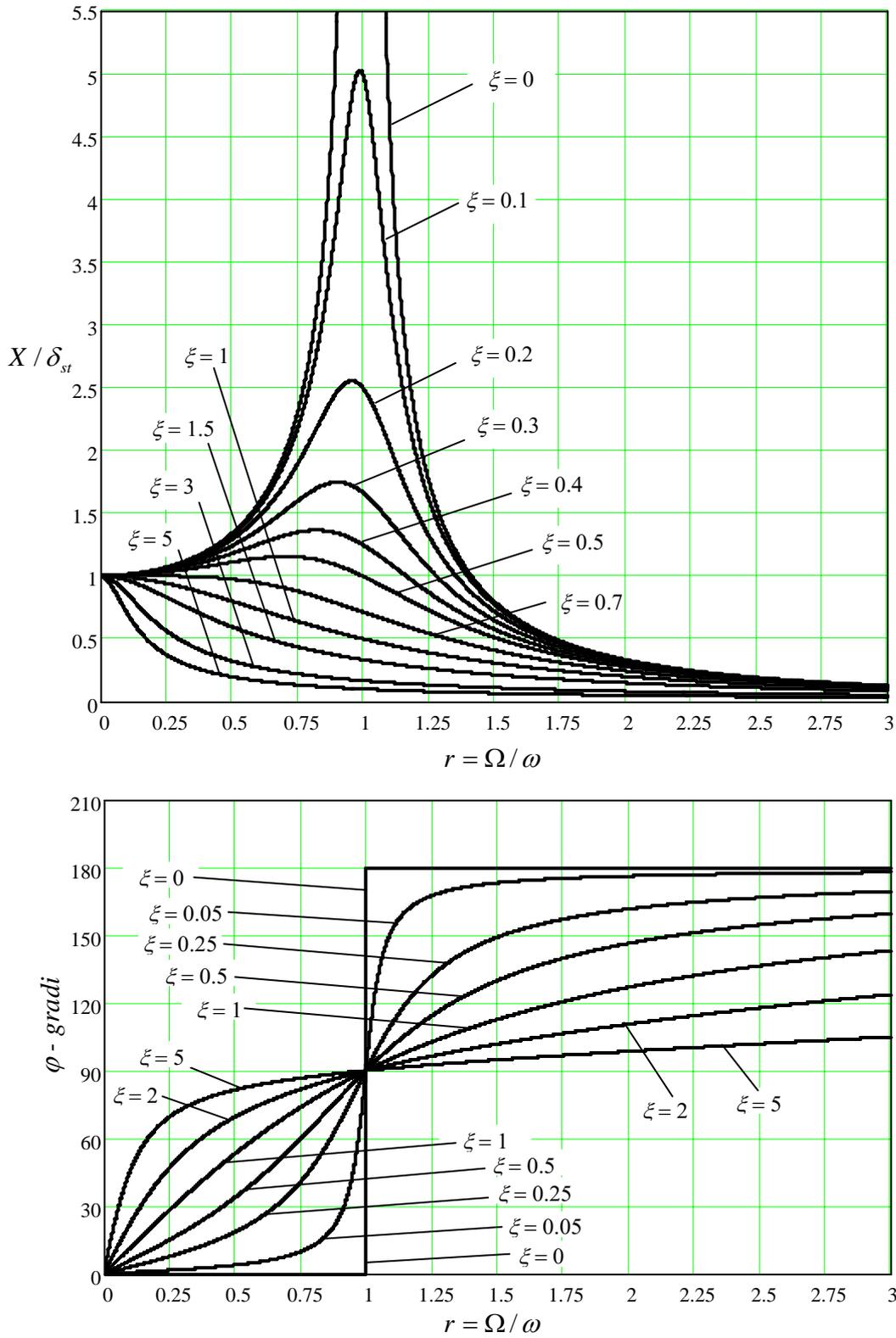


Figura 7: Ampiezza adimensionale X/δ_{st} e sfasamento φ in funzione del rapporto $r = \Omega/\omega$ per differenti valori del fattore di smorzamento.

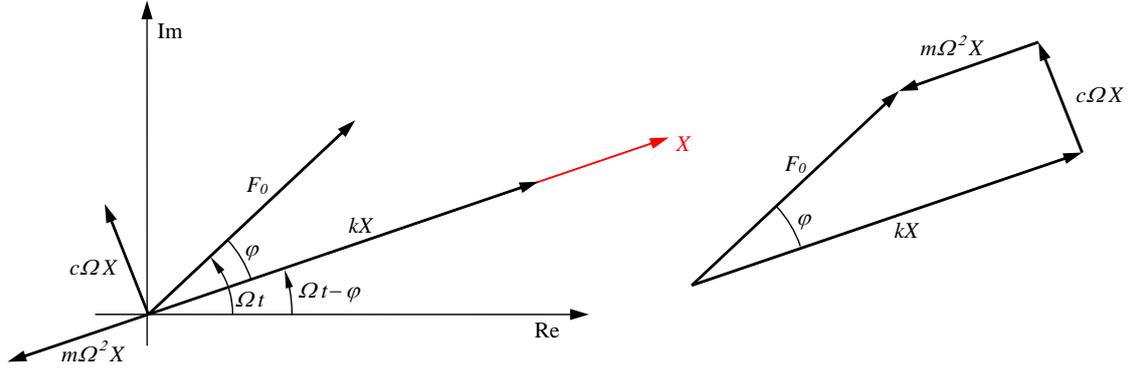


Figura 8: Diagramma vettoriale nel piano complesso.

Per disegnare il diagramma occorre in primo luogo fornire una rappresentazione complessa di tutte le grandezze in gioco. Consideriamo allora l'espressione dello spostamento in forma complessa data dall'equazione (33), che qui riscriviamo per comodità:

$$\bar{x}_p(t) = \bar{X}e^{i\Omega t} = Xe^{i(\Omega t - \varphi)} \quad (47)$$

e, tramite derivazione, calcoliamo la velocità e l'accelerazione⁸:

$$\dot{\bar{x}}_p(t) = i\Omega\bar{X}e^{i\Omega t} = \Omega X e^{i(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})} \quad (48)$$

$$\ddot{\bar{x}}_p(t) = -\Omega^2\bar{X}e^{i\Omega t} = \Omega^2 X e^{i(\Omega t - \varphi + \pi)} \quad (49)$$

Ora, sempre utilizzando la notazione complessa, ricaviamo l'espressione della forza elastica \bar{F}_{el} (dipendente dallo spostamento), della forza smorzante \bar{F}_{sm} (dipendente dalla velocità) e della forza d'inerzia \bar{F}_{in} (dipendente dall'accelerazione):

$$\bar{F}_{el}(t) = k\bar{x}_p(t) = kXe^{i(\Omega t - \varphi)}$$

$$\bar{F}_{sm}(t) = c\dot{\bar{x}}_p(t) = c\Omega X e^{i(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})} \quad (50)$$

$$\bar{F}_{in}(t) = m\ddot{\bar{x}}_p(t) = m\Omega^2 X e^{i(\Omega t - \varphi + \pi)}$$

In base all'equazione di moto, la somma delle tre forze (50) deve uguagliare la forzante complessa $\bar{F}(t) = F_0e^{i\Omega t}$ e pertanto possiamo scrivere:

$$\bar{F}_{el}(t) + \bar{F}_{sm}(t) + \bar{F}_{in}(t) = \bar{F}(t) \quad (51)$$

I vari termini presenti nell'equazione (51) sono rappresentati nel piano complesso, come mostrato in Figura 8; si osserva chiaramente che la somma vettoriale delle tre forze (elastica, smorzante ed inerziale) è pari alla la forzante applicata alla massa. Occorre inoltre tenere presente che il diagramma vettoriale ruota nel piano complesso in senso antiorario con velocità angolare Ω e che, durante il movimento, si mantengono inalterate le relazioni di fase tra i vettori.

Occorre inoltre sottolineare che, se la forzante effettivamente agente sul sistema è espressa tramite la funzione seno, (ovvero se $F(t) = F_0 \sin \Omega t$) le componenti immaginarie dei vettori rotanti corrispondono ai valori effettivi delle forze agenti sul sistema al generico istante t . Analogamente, se $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ le forze effettive sono date dalle componenti reali dei vettori rotanti.

In Figura 8 si osserva infine che la forzante $\bar{F}(t) = F_0e^{i\Omega t}$ è rappresentata da un vettore inclinato di un angolo Ωt rispetto all'asse reale: quindi, per $t = 0$ l'angolo di fase è nullo. Se è presente un angolo di fase ψ già all'istante iniziale, si avrà $\bar{F}(t) = F_0e^{i(\Omega t + \psi)}$ e tutto il diagramma vettoriale subirà una rotazione in senso antiorario pari a tale angolo di fase.

⁸Si tenga presente che:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \quad e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

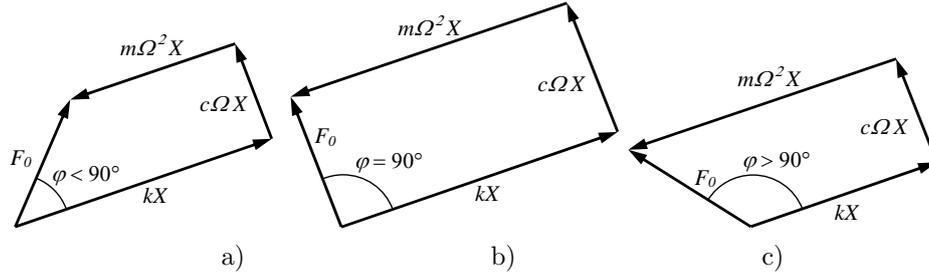


Figura 9: Diagrammi vettoriali per differenti valori di $r = \Omega/\omega$: a) basse frequenze ($r < 1$); b) in risonanza ($r = 1$). c) alte frequenze ($r > 1$).

La Figura 9 mostra come si modifica il diagramma vettoriale al variare della pulsazione della forzante: si osserva che per basse frequenze ($r < 1$) l'angolo di fase φ è acuto, mentre per alte frequenze ($r > 1$) l'angolo φ è ottuso; in condizioni di risonanza $\varphi = 90$, la forzante uguaglia in modulo la forza dello smorzatore viscoso, mentre la forza d'inerzia ha lo stesso valore della forza elastica.

3.5 Considerazioni energetiche

Consideriamo il moto a regime del sistema vibrante rappresentato in Figura 6 e calcoliamo il lavoro L_F compiuto in un ciclo completo di oscillazione dalla forzante $F(t) = F_0 \sin \Omega t$; tale lavoro corrisponde all'energia che la forzante introduce nel sistema e risulta pari a:

$$L_F = \int_{ciclo} F dx = \int_0^T F_0 \sin \Omega t \dot{x} dt \quad (52)$$

dove $T = 2\pi/\Omega$ indica il periodo dell'oscillazione forzata.

Nel moto a regime si ha $x(t) = x_p(t) = X \sin(\Omega t - \varphi)$ (vedi equazione (21)) e quindi la velocità della massa risulta:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \Omega X \cos(\Omega t - \varphi) \quad (53)$$

Sostituendo questa espressione nella (52) e ricordando un'identità trigonometrica, si ha:

$$\begin{aligned} L_F &= F_0 \Omega X \int_0^{2\pi/\Omega} \sin \Omega t (\cos \Omega t \cos \varphi + \sin \Omega t \sin \varphi) dt \\ &= F_0 \Omega X \sin \varphi \int_0^{2\pi/\Omega} \sin^2 \Omega t dt = F_0 \Omega X \sin \varphi \left(\frac{\pi}{\Omega} \right) = \pi F_0 X \sin \varphi \end{aligned} \quad (54)$$

In modo del tutto simile possiamo ricavare il lavoro L_v compiuto in un ciclo dalla forza viscosa, lavoro che rappresenta l'energia dissipata dallo smorzatore durante la vibrazione:

$$L_v = \int_{ciclo} c \dot{x} dx = \int_0^T c \dot{x}^2 dt \quad (55)$$

Sostituendo nella (55) l'espressione della velocità data dalla (53) e sviluppando i calcoli⁹ si ricava:

$$L_v = c \Omega^2 X^2 \int_0^{2\pi/\Omega} \cos^2(\Omega t - \varphi) dt = \pi c \Omega X^2 \quad (56)$$

In base ai calcoli svolti possiamo concludere che il lavoro L_F della forzante è una funzione lineare dell'ampiezza di oscillazione X , mentre il lavoro L_v è una funzione quadratica dell'ampiezza; tale situazione è chiaramente rappresentata nel grafico di Figura 10.

⁹Per calcolare l'integrale presente nella (56) si può effettuare un cambio di variabile, ponendo $\alpha = \Omega t - \varphi$; si ha quindi:

$$\int_0^{2\pi/\Omega} \cos^2(\Omega t - \varphi) dt = \frac{1}{\Omega} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{\Omega} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) d\alpha = \frac{1}{2\Omega} \left[\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{\Omega}$$

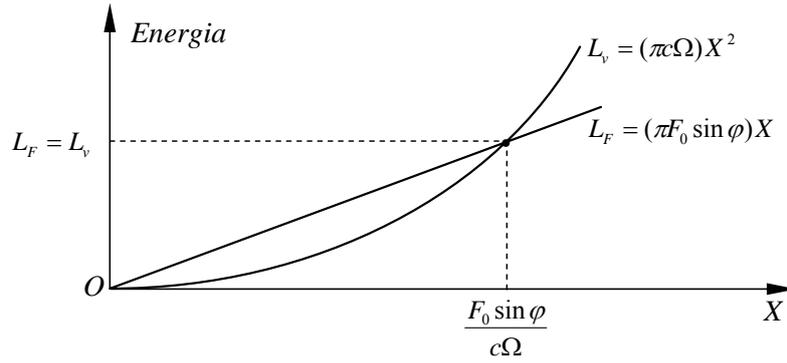


Figura 10: Rappresentazione grafica delle energie L_F e L_v in funzione dell'ampiezza di oscillazione X .

Nel punto in cui la retta interseca la parabola si ha una situazione di equilibrio energetico, ovvero $L_F = L_v$: ciò significa che l'energia introdotta dalla forzante in un ciclo è esattamente uguale all'energia dissipata dalla forza dello smorzatore viscoso nel medesimo ciclo di oscillazione. L'ampiezza di oscillazione corrispondente si ottiene uguagliando le due energie:

$$\pi F_0 X \sin \varphi = \pi c \Omega X^2 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{F_0 \sin \varphi}{c \Omega} \quad (57)$$

L'ampiezza X , data dalla (57) è identica a quella fornita dalla (37), sebbene le due espressioni appaiano formalmente diverse¹⁰. I calcoli svolti mostrano che l'ampiezza di oscillazione nel moto a regime può essere ricavata anche utilizzando considerazioni di carattere energetico. Inoltre, proprio in virtù del bilancio energetico suddetto, l'ampiezza di vibrazione non può aumentare, in quanto l'energia introdotta dalla forzante in un ciclo viene interamente dissipata dallo smorzatore; poiché il sistema vibrante non incrementa la propria energia durante il suo movimento, l'ampiezza non può che rimanere costante.

Poiché l'ampiezza di vibrazione a regime assume un valore finito anche in condizioni di risonanza, si può concludere che, in tale situazione, deve comunque sussistere l'uguaglianza fra l'energia prodotta dalla forzante e l'energia dissipata dallo smorzatore viscoso.

Ricordando che, in risonanza, l'angolo di fase φ è uguale a 90 indipendentemente dal valore dello smorzamento (vedi Figura 7b) l'equazione (54) fornisce:

$$L_{F,ris} = \pi F_0 X_{ris} \quad (58)$$

dove $L_{F,ris}$ e X_{ris} indicano rispettivamente l'energia introdotta dalla forzante e l'ampiezza di oscillazione nelle condizioni di risonanza.

¹⁰Per verificare questo fatto ricaviamo $\sin \varphi$ dalla (57) ottenendo:

$$\sin \varphi = \frac{c \Omega X}{F_0}$$

Consideriamo poi l'identità trigonometrica:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}$$

Infine ricordiamo che, in base alla (38) si ha:

$$\tan \varphi = \frac{c \Omega}{k - m \Omega^2}$$

Dalle tre equazioni suddette si ricava immediatamente:

$$\frac{c \Omega}{k - m \Omega^2} = \frac{\frac{c \Omega X}{F_0}}{\pm \sqrt{1 - \left(\frac{c \Omega X}{F_0}\right)^2}}$$

Risolviendo rispetto ad X questa equazione si ottiene:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m \Omega^2)^2 + (c \Omega)^2}}$$

espressione che risulta identica alla (37).

Per calcolare l'energia dissipata dallo smorzatore in condizioni di risonanza utilizziamo la (56), ponendo in essa $\Omega = \omega$ e $X = X_{ris}$; si ottiene:

$$L_{v,ris} = \pi c \omega X_{ris}^2 \quad (59)$$

Procedendo come sopra, poniamo $L_{F,ris} = L_{v,ris}$ ottenendo:

$$\pi F_0 X_{ris} = \pi c \omega X_{ris}^2 \quad \Rightarrow \quad X_{ris} = \frac{F_0}{c \omega} \quad (60)$$

Tale valore era immediatamente ricavabile dalla (37) ponendo in essa $\Omega = \omega$.

Ricordando, infine che $F_0 = k \delta_{st}$, $c = 2 \xi m \omega$ e $k = m \omega^2$, l'ampiezza di vibrazione in condizione di risonanza si può riscrivere nella forma:

$$X_{ris} = \frac{k \delta_{st}}{2 \xi m \omega^2} = \frac{\delta_{st}}{2 \xi} \quad (61)$$

Il lettore può osservare che tale risultato coincide con quello dato dalla (43).

4 Sistemi con masse rotanti squilibrate

Come è noto lo sbilanciamento nelle macchine rotanti è una delle cause più frequenti di vibrazioni. Per studiare il fenomeno possiamo fare riferimento al modello semplificato rappresentato in Figura 11a, che schematizza una macchina di massa M su cui è montato un rotore eccentrico di massa m rotante a velocità angolare Ω costante.

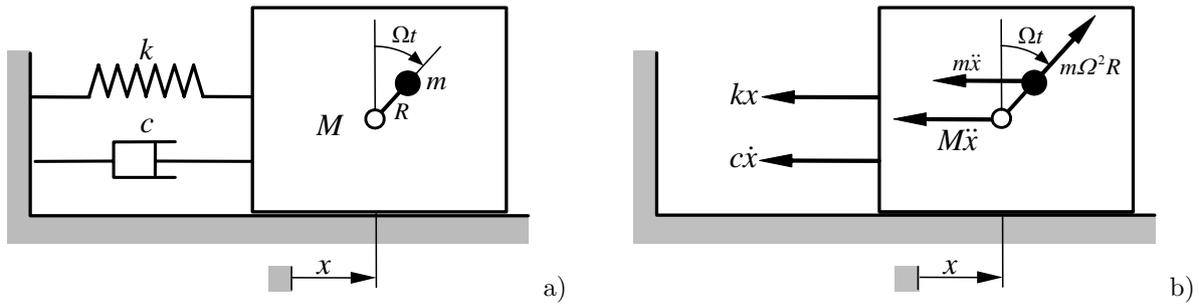


Figura 11: a) Modello di sistema vibrante ad un grado di libertà eccitato dalla rotazione di una massa eccentrica. b) Diagramma di corpo libero.

Il parametro R indica il valore dell'eccentricità, ovvero la distanza fra l'asse di rotazione ed il centro di massa del rotore. La posizione angolare del rotore al generico istante di tempo t è individuata dall'angolo Ωt , misurato in senso orario rispetto alla verticale passante per il punto O .

La molla e lo smorzatore visibili in figura permettono di considerare il comportamento elastico dei supporti e le dissipazioni di energia che avvengono durante il moto vibratorio.

La Figura 11b, mostra il diagramma di corpo libero del sistema; il verso delle forze è quello corrispondente alla convenzione di segno utilizzata per lo spostamento e le sue derivate temporali. Si noti, sulla massa m , la presenza contemporanea di due forze: la forza centrifuga, diretta radialmente, dovuta al moto rotatorio della massa eccentrica attorno al perno O e la forza d'inerzia orizzontale di valore $m\ddot{x}$, dovuta al movimento in direzione orizzontale (moto di trascinamento).

La condizione di equilibrio dinamico alla traslazione in direzione orizzontale fornisce l'equazione seguente:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx + m\ddot{x} - m\Omega^2 R \sin \Omega t = 0 \quad (62)$$

Indicando con $M_T = M + m$ la massa totale della macchina e portando al secondo membro il termine sinusoidale si ha:

$$M_T\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\Omega^2 R \sin \Omega t \quad (63)$$

Si osservi che la pulsazione Ω della forzante coincide con la velocità angolare del rotore e che il valore massimo della forza eccitatrice dipende da Ω^2 , e quindi aumenta con legge quadratica all'aumentare della velocità di rotazione. Pertanto la situazione che ora si presenta è diversa da quella esaminata in precedenza (vedi (20)), nella quale la massima intensità F_0 della forzante era indipendente da Ω .

La soluzione particolare dell'equazione (63) permette di valutare il comportamento del sistema in condizioni di regime: la sua espressione analitica è sempre fornita dalla (21), in quanto anche in questo caso la causa eccitatrice è una funzione sinusoidale a pulsazione Ω ; pertanto si avrà:

$$x_p(t) = X \sin(\Omega t - \varphi) \quad (64)$$

Il calcolo di X e φ si può effettuare rapidamente ricorrendo all'algebra complessa, come illustrato nel paragrafo 3.2; riscriviamo quindi la (63) introducendo le quantità complesse:

$$M_T \ddot{\bar{x}} + c \dot{\bar{x}} + k \bar{x} = m \Omega^2 R e^{i \Omega t} \quad (65)$$

e assumiamo come soluzione:

$$\bar{x}_p(t) = \bar{X} e^{i \Omega t} \quad (66)$$

con $\bar{X} = X e^{-i \varphi}$; sostituendo la soluzione (66) e le sue derivate nella (65) si ricava:

$$[-M_T \Omega^2 + ci \Omega + k] \bar{X} e^{i \Omega t} = m \Omega^2 R e^{i \Omega t} \quad (67)$$

da cui, eliminando in ambo i membri il termine $e^{i \Omega t}$, si ottiene:

$$\bar{X} = \frac{m \Omega^2 R}{(k - M_T \Omega^2) + ic \Omega} \quad (68)$$

L'ampiezza X e la fase φ risultano pertanto:

$$X = \frac{m \Omega^2 R}{\sqrt{(k - M_T \Omega^2)^2 + (c \Omega)^2}} \quad (69)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{c \Omega}{k - M_T \Omega^2} \right) \quad (70)$$

Anche in questo caso possiamo riscrivere le formule (69) e (70) utilizzando grandezze adimensionali; le operazioni da effettuare sono le seguenti:

- dividere per k il numeratore ed il denominatore delle frazioni al secondo membro delle espressioni (69) e (70);
- introdurre le relazioni: $\omega = \sqrt{k/M_T}$; $\xi = c/2M_T\omega$; $X_0 = mR/M_T$; $r = \Omega/\omega$.

Dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (71)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{2\xi r}{1 - r^2} \right) \quad (72)$$

La rappresentazione grafica delle relazioni (71) e (72) in funzione di r e per differenti valori di ξ è riportata nei diagrammi di Figura 12.

Analizzando la funzione (71) (relativa all'ampiezza adimensionale) ed osservandone il corrispondente grafico possiamo ricavare le seguenti osservazioni:

- a) tutte le curve partono dall'origine in quanto, a velocità angolare nulla, l'intensità della forza eccitatrice è anch'essa nulla e quindi il sistema non può vibrare;
- b) in assenza di smorzamento ($\xi = 0$) ed in condizioni di risonanza ($r = 1$) l'ampiezza delle vibrazioni tende all'infinito;
- c) nella zona di risonanza l'entità dello smorzamento influenza notevolmente l'ampiezza di vibrazione;
- d) a velocità molto elevate il rapporto X/X_0 è circa pari ad uno e l'effetto dello smorzamento è trascurabile;
- e) in condizioni di risonanza ($r = 1$) si ha:

$$\left(\frac{X}{X_0} \right)_{r=1} = \frac{1}{2\xi} \quad (73)$$

ma tale valore non corrisponde esattamente al massimo del fattore di amplificazione dinamica.

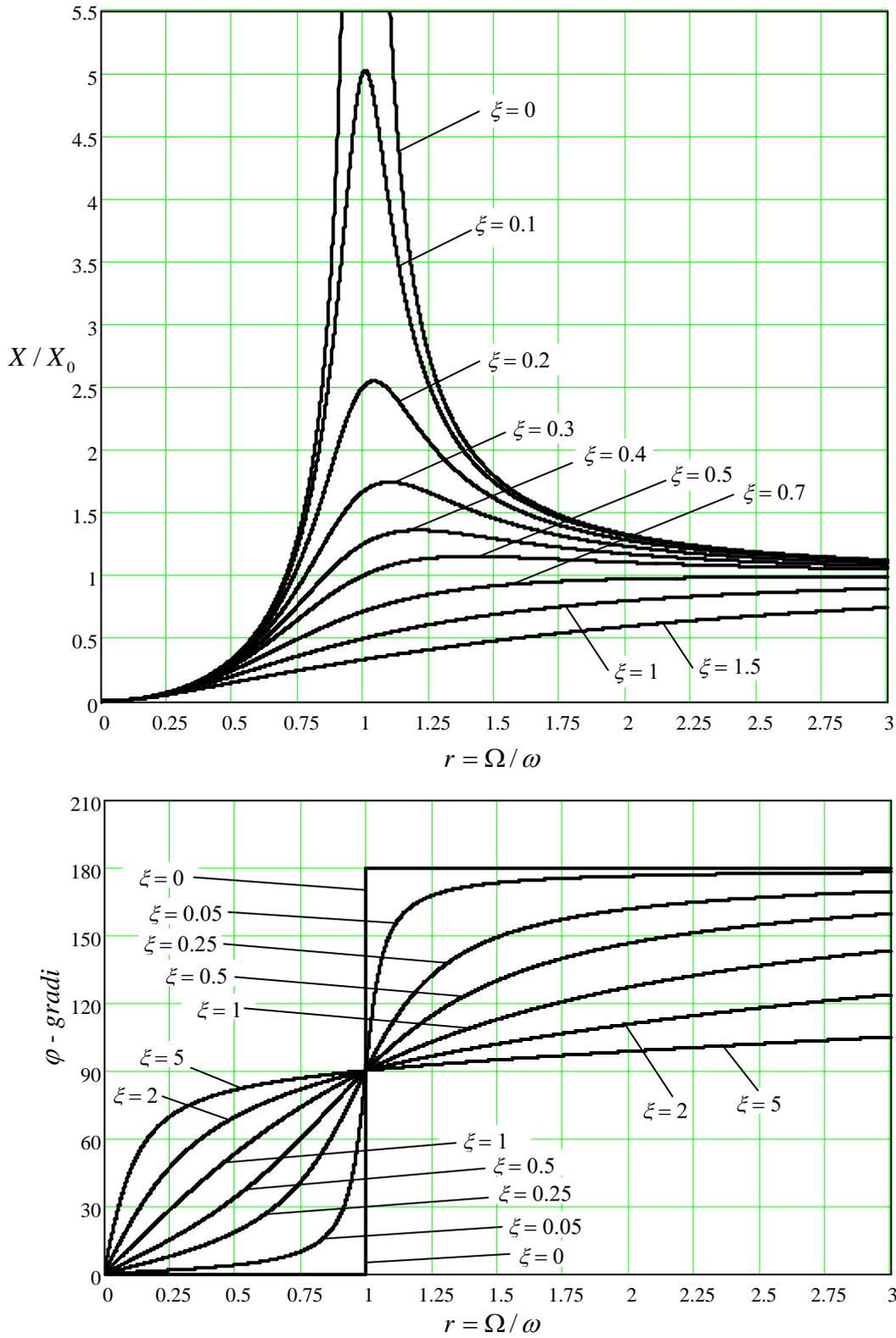


Figura 12: Ampiezza adimensionale X/X_0 e sfasamento φ in funzione del rapporto $r = \Omega/\omega$ per differenti valori del fattore di smorzamento.

f) Per calcolare il valore massimo dell'amplificazione imponiamo la condizione:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \right] = 0 \quad (74)$$

Sviluppando i calcoli e considerando solo la soluzione positiva si ha:

$$r = \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}} \equiv r_m \quad (75)$$

sostituendo tale valore nella (71) si ricava il valore massimo dell'amplificazione che risulta pari a:

$$\left(\frac{X}{X_0} \right)_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (76)$$

In base alla (75) l'ascissa del punto di massimo esiste soltanto per $0 < \xi < 1/\sqrt{2}$, ovvero quando è positiva l'espressione sotto radice al denominatore; si osserva inoltre che il massimo si trova leggermente a destra rispetto all'asintoto verticale¹¹. Per $\xi > 1/\sqrt{2}$ l'espressione sotto radice nella (75) assume valore negativo e pertanto l'ascissa del massimo è immaginaria: in questo caso il massimo della funzione non esiste ed il grafico cresce in modo monotono all'aumentare del valore di r .

Per quanto riguarda il grafico della fase di Figura 12, si osserva che esso è identico a quello riportato in Figura 7; valgono quindi le stesse considerazioni già esposte nel paragrafo 3.3.

5 Sistemi sottoposti al moto armonico della base

Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore rappresentato in Figura 13, in cui la base si muove di moto armonico. Sia $y(t) = Y \sin \Omega t$ lo spostamento della base ed $x(t)$ lo spostamento della massa m ; per semplicità si assuma la posizione di equilibrio della massa $x = 0$ quando la base si trova nella posizione $y = 0$. La forza esercitata dalla molla dipende dallo spostamento relativo $x - y$ fra la massa e la base, mentre la forza esercitata dallo smorzatore dipende dalla velocità relativa $\dot{x} - \dot{y}$. L'equazione di equilibrio dinamico, ricavata dal diagramma di corpo libero rappresentato in Figura 13b, è la seguente:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (77)$$

Portando al secondo membro i termini dipendenti dal moto della base si ha:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} \quad (78)$$

¹¹Se lo smorzamento è molto piccolo, il termine ξ^2 è trascurabile e quindi l'ascissa e l'ordinata del massimo risultano:

$$r_m \simeq 1 \quad \left(\frac{X}{X_0} \right)_{max} \simeq \frac{1}{2\xi}$$

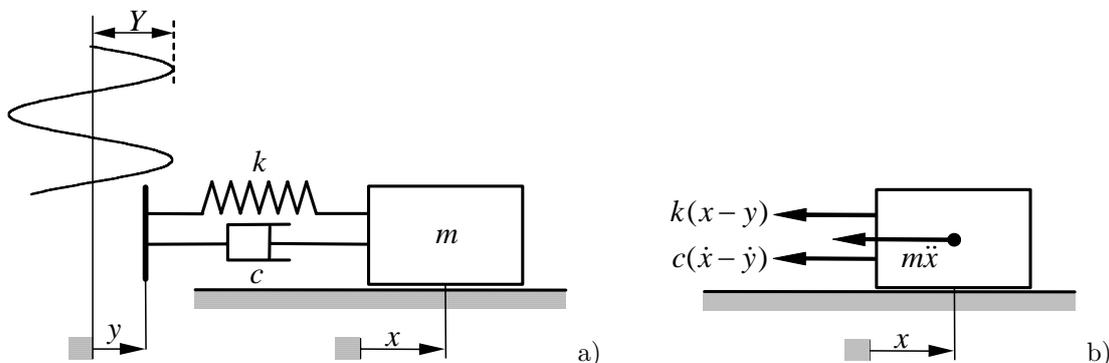


Figura 13: a) Oscillatore ad un grado di libertà eccitato dal moto armonico della base. b) Diagramma di corpo libero.

Anche in questo caso studieremo la soluzione di regime. Osserviamo innanzitutto che la forzante al secondo membro della (78) contiene due termini armonici fra di loro in quadratura (ovvero sfasati di 90°), aventi uguale pulsazione Ω ma intensità diverse: infatti sostituendo le espressioni di $y(t)$ e della sua derivata nella (78) si ottiene:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY \sin \Omega t + c\Omega Y \cos \Omega t \quad (79)$$

Per l'equazione (79) assumiamo come soluzione particolare (di regime) la consueta espressione

$$x_p(t) = X \sin(\Omega t - \varphi) \quad (80)$$

dove X e φ devono essere calcolate in funzione dei parametri del sistema e della pulsazione Ω . Ancora una volta risulta conveniente effettuare il calcolo mediante l'algebra complessa, al fine di evitare l'uso delle relazioni trigonometriche. Riscriviamo quindi l'equazione (78) introducendo le funzioni complesse $\bar{y}(t) = Y e^{i\Omega t}$ e $\dot{\bar{y}}(t) = i\Omega Y e^{i\Omega t}$:

$$m\ddot{\bar{x}} + c\dot{\bar{x}} + k\bar{x} = kY e^{i\Omega t} + ci\Omega Y e^{i\Omega t} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\bar{x}} + c\dot{\bar{x}} + k\bar{x} = Y(k + ic\Omega)e^{i\Omega t} \quad (81)$$

Come di consueto, assumiamo come soluzione particolare della (81) la funzione complessa:

$$\bar{x}_p(t) = \bar{X} e^{i\Omega t} \quad (82)$$

con $\bar{X} = X e^{-i\varphi}$; sostituendo la (82) e le sue derivate nella (81) si perviene alla seguente equazione:

$$[-m\Omega^2 + ci\Omega + k] \bar{X} e^{i\Omega t} = Y(k + ic\Omega)e^{i\Omega t} \quad (83)$$

Semplificando il termine $e^{i\Omega t}$ si ottiene:

$$\bar{X} = Y \left[\frac{k + ic\Omega}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega} \right] \quad (84)$$

Per calcolo dell'ampiezza X dello sfasamento φ , riscriviamo la (84) nella forma:

$$\bar{X} = X e^{-i\varphi} = Y \sqrt{\frac{k^2 + (c\Omega)^2}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \quad (85)$$

in cui

$$\tan \vartheta_1 = \frac{c\Omega}{k} \quad \tan \vartheta_2 = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \quad (86)$$

Osservando la (85), si deduce immediatamente che:

$$X = Y \sqrt{\frac{k^2 + (c\Omega)^2}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \quad (87)$$

$$\varphi = \vartheta_2 - \vartheta_1 \quad (88)$$

Ricordando ora la nota formula trigonometrica che permette di esprimere la tangente della somma o della differenza di due angoli in funzione delle tangenti dei singoli angoli¹², e tenendo conto delle relazioni (86) si ricava:

$$\tan \varphi = \tan(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{\tan \vartheta_2 - \tan \vartheta_1}{1 + \tan \vartheta_2 \tan \vartheta_1} = \frac{\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} - \frac{c\Omega}{k}}{1 + \left(\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}\right) \left(\frac{c\Omega}{k}\right)} \quad (89)$$

Sviluppando i calcoli nella (89) si perviene alla seguente espressione per l'angolo di fase:

$$\varphi = \arctan \left[\frac{mc\Omega^3}{k(k - m\Omega^2) + (c\Omega)^2} \right] \quad (90)$$

Ancora una volta operiamo in modo tale da riscrivere le formule (87) e (90) in funzione delle grandezze adimensionali ξ ed r ; le operazioni da effettuare sono le seguenti:

¹²La formula da utilizzare è la seguente:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

- dividere per k^2 il numeratore ed il denominatore delle frazioni al secondo membro delle espressioni (87) e (90);
- introdurre le relazioni: $\omega = \sqrt{k/m}$; $\xi = c/2m\omega$; $r = \Omega/\omega$.

Dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$\frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (91)$$

$$\varphi = \arctan \left[\frac{2\xi r^3}{1 + (4\xi^2 - 1)r^2} \right] \quad (92)$$

La rappresentazione grafica delle relazioni (91) e (92) in funzione di r e per differenti valori di ξ è riportata nei diagrammi di Figura 14.

Analizzando la funzione (91) (relativa all'ampiezza adimensionale) ed osservandone il corrispondente grafico possiamo ricavare le seguenti osservazioni:

- a) in assenza di smorzamento ($\xi = 0$) ed in condizioni di risonanza ($r = 1$) l'ampiezza delle vibrazioni tende all'infinito;
- b) il rapporto X/Y tende al valore unitario a frequenza molto basse, mentre tende a zero a frequenze molto alte; nella zona di risonanza, in cui r assume valori prossimi all'unità, l'amplificazione appare molto evidente (ma solo se lo smorzamento è basso);
- c) indipendentemente dal valore di ξ , tutte le curve passano per il punto di ascissa $r = \sqrt{2}$ ed ordinata uguale ad uno;
- d) per $r < \sqrt{2}$ il rapporto X/Y è tanto più grande quanto più basso è il valore di ξ ; al contrario, per $r > \sqrt{2}$ il rapporto X/Y è tanto più grande quanto più alto è il valore di ξ ;
- e) per qualsiasi valore di ξ si ha $X/Y < 1$ solo se $r > \sqrt{2}$;
- f) in condizioni di risonanza ($r = 1$) si ha:

$$\left(\frac{X}{Y} \right)_{r=1} = \sqrt{1 + \frac{1}{4\xi^2}} \quad (93)$$

ma tale valore non corrisponde esattamente al massimo del fattore di amplificazione dinamica.

- g) Il massimo dell'amplificazione si ha in corrispondenza del valore di r che rende minima l'espressione sotto radice che compare al secondo membro della (91); per la ricerca del massimo poniamo quindi la condizione:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \right] = 0 \quad (94)$$

Sviluppando i calcoli e considerando solo la soluzione positiva si ha:

$$r = \frac{1}{2\xi} \sqrt{\sqrt{1 + 8\xi^2} - 1} \equiv r_m \quad (95)$$

sostituendo tale valore nella (41) si ricava il valore massimo dell'amplificazione che risulta pari a:

$$\left(\frac{X}{Y} \right)_{max} = \frac{2\sqrt{2}\xi^2 \sqrt[4]{1 + 8\xi^2}}{\sqrt{1 + 8\xi^2 + (8\xi^4 - 4\xi^2 - 1)\sqrt{1 + 8\xi^2}}} \quad (96)$$

Per valori molto bassi di ξ l'ascissa del massimo r_m tende al valore unitario, mentre al crescere dello smorzamento r_m diminuisce ed il massimo si sposta verso sinistra. Per $\xi = 1$ si ha $r_m = \sqrt{2}/2$ e $(X/Y)_{max} = 2\sqrt{3}/3$. Per valori di smorzamento molto elevati il massimo, pur essendo sempre presente, risulta poco evidente in quanto la funzione (91) tende ad "appiattirsi", confondendosi con la retta orizzontale di ordinata unitaria.

Passiamo ora ad esaminare la funzione (92) ed il corrispondente grafico; si osserva che:

- a) per un sistema privo di smorzamento ($\xi = 0$) lo sfasamento è nullo per $0 < r < 1$ e pari 180° per $r > 1$; in altri termini, l'eccitazione e la risposta sono *in fase* per frequenze inferiori a quella di risonanza ed *in controfase* a frequenze superiori a quella di risonanza;
- b) in condizioni di risonanza ($r = 1$) l'angolo di fase vale:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{1}{2\xi} \right) \equiv \varphi_{ris} \quad (97)$$

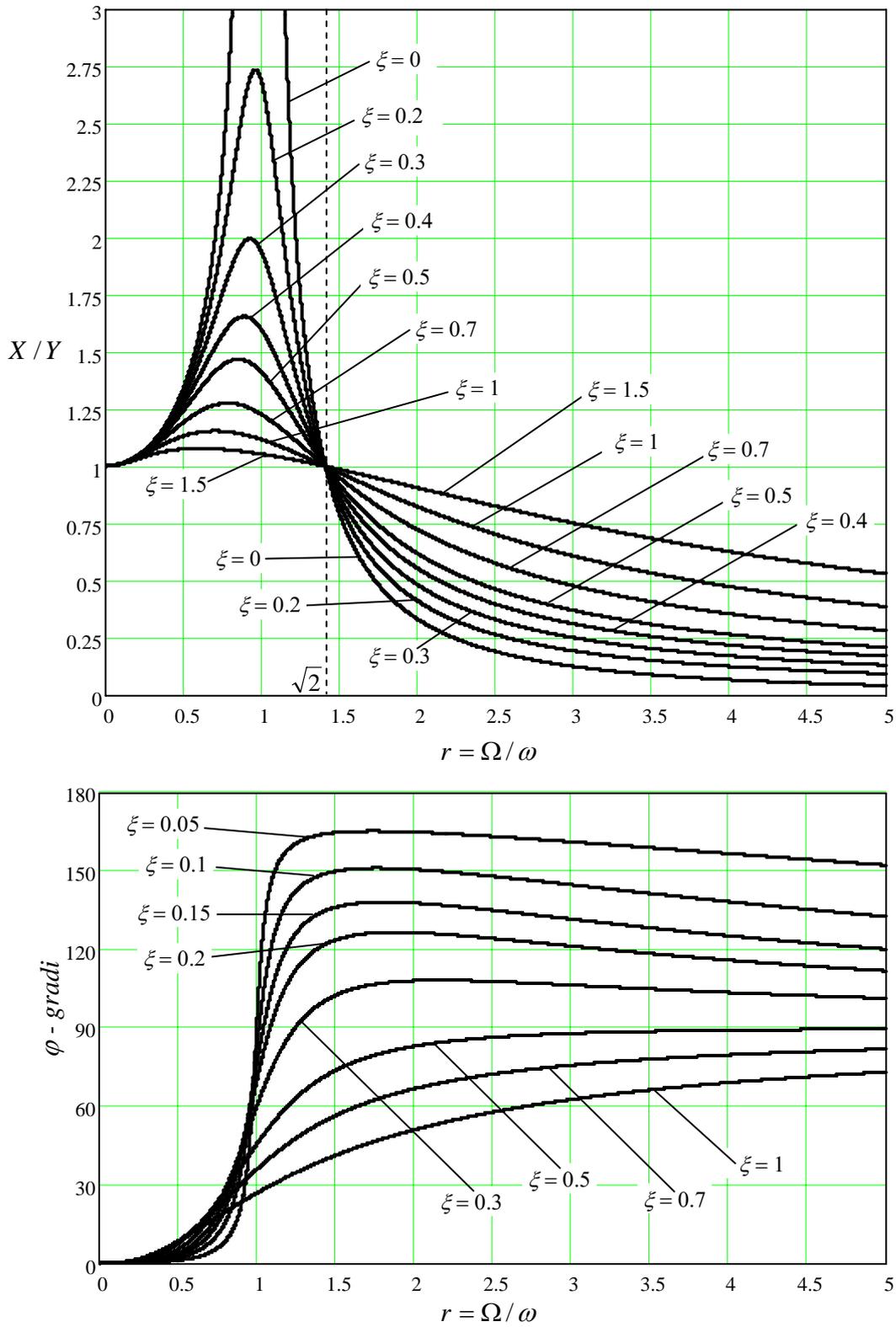


Figura 14: Ampiezza adimensionale X/Y e sfasamento φ in funzione del rapporto $r = \Omega/\omega$ per differenti valori del fattore di smorzamento.

c) in base all'equazione (92) si ha $\varphi = \pi/2$ per $1 + (4\xi^2 - 1)r^2 = 0$, ovvero per

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\xi^2}} \equiv \bar{r} \quad (98)$$

Ovviamente ciò è possibile solo per $\xi < 1/2$, condizione che rende positiva l'espressione sotto radice nella (98);

d) per valori di r tendenti all'infinito l'angolo di fase tende a $\pi/2$;

e) la funzione (92) ammette un punto di massimo per

$$r = \sqrt{\frac{3}{1 - 4\xi^2}} \equiv r_m \quad (99)$$

che esiste soltanto per $\xi < 1/2$. Tale risultato si ottiene, come di consueto, ponendo uguale a zero la derivata rispetto ad r della funzione (92), (per semplificare i calcoli conviene uguagliare a zero la derivata della funzione tra parentesi quadre nella (92)). L'ordinata del massimo risulta:

$$\varphi_{max} = \pi - \arctan \left[\xi \sqrt{\left(\frac{3}{1 - 4\xi^2} \right)^3} \right] \quad (100)$$

Si osserva infine che, se $\xi > 1/2$, il massimo non esiste e la funzione tende a $\pi/2$ in modo monotono.

5.1 Moto relativo

Lo studio delle vibrazioni dovute al moto armonico della base si può effettuare anche utilizzando come coordinata libera lo spostamento relativo della massa rispetto alla base. Infatti, se indichiamo con $z(t) = x(t) - y(t)$ tale spostamento, l'equazione di moto (77) può essere riscritta nella forma

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\Omega^2 Y \sin \Omega t \quad (101)$$

L'equazione così ottenuta è formalmente analoga alla (63), in quanto l'ampiezza della forzante dipende da Ω^2 . Il calcolo della soluzione a regime $z_p(t)$ può essere effettuato con passaggi analoghi a quelli già visti nel paragrafo 4; il risultato è il seguente:

$$z_p(t) = Z \sin(\Omega t - \varphi^*) \quad (102)$$

in cui

$$Z = \frac{m\Omega^2 Y}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} = Y \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (103)$$

$$\varphi^* = \arctan \left(\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \right) = \arctan \left(\frac{2\xi r}{1 - r^2} \right) \quad (104)$$

Dopo aver calcolato Z e φ^* lo spostamento assoluto della massa m si ricava immediatamente sommando allo spostamento relativo lo spostamento della base:

$$x_p(t) = z_p(t) + y(t) = Z \sin(\Omega t - \varphi^*) + Y \sin \Omega t \quad (105)$$

Il risultato ovviamente deve coincidere con quello ottenuto tramite la (80).

6 Studio del transitorio

Come abbiamo già avuto modo di sottolineare, la risposta completa $x(t)$ del sistema vibrante si ottiene sommando la soluzione $x_h(t)$ dell'equazione omogenea alla soluzione particolare $x_p(t)$ (vedi equazione (2)); nei casi di eccitazione armonica esaminati in questo capitolo la soluzione particolare assume sempre la forma di una sinusoide di pulsazione Ω , la cui ampiezza X ed il cui sfasamento φ possono essere facilmente calcolati tramite apposite formule.

La soluzione dell'equazione omogenea, ricavata nel capitolo precedente, dipende dal grado di smorzamento del sistema e contiene due costanti di integrazione, ricavabili mediante le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (106)$$

Sommando le due soluzioni si può analizzare il comportamento del sistema vibrante fin dai primi istanti in cui viene applicata la forzante; in altri termini, si può studiare il comportamento in transitorio e vedere come il sistema evolve verso la condizione di regime.

Nel caso di sistema sottosmorzato ($\xi < 1$) si ha:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}(A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t) + X \sin(\Omega t - \varphi) \quad (107)$$

Imponendo le condizioni iniziali (106) si ricavano i valori delle costanti A e B , che risultano:

$$A = x_0 + X \sin \varphi \quad B = \frac{X(\xi\omega \sin \varphi - \Omega \cos \varphi) + \dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_s} \quad (108)$$

Se il sistema è sovrasmorzato ($\xi > 1$), la soluzione completa è:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + X \sin(\Omega t - \varphi) \quad (109)$$

dove λ_1 e λ_2 indicano le radici (reali e negative) dell'equazione caratteristica. Le costanti C_1 e C_2 , calcolate tramite le condizioni iniziali, sono date dalle seguenti espressioni:

$$C_1 = \frac{X(\lambda_2 \sin \varphi + \Omega \cos \varphi) + x_0 \lambda_2 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad C_2 = -\frac{X(\lambda_1 \sin \varphi + \Omega \cos \varphi) + x_0 \lambda_1 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (110)$$

In condizioni di smorzamento critico ($\xi = 1$) la soluzione completa assume l'espressione:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega t} + X \sin(\Omega t - \varphi) \quad (111)$$

in cui

$$C_1 = x_0 + X \sin \varphi \quad C_2 = X(\omega \sin \varphi - \Omega \cos \varphi) + \omega x_0 + \dot{x}_0 \quad (112)$$