

# Vibrazioni libere di sistemi ad un grado di libertà

## 1 Introduzione

Tutti i sistemi dotati di massa e di elasticità sono in grado di compiere vibrazioni libere, ovvero possono oscillare senza essere sottoposti all'azione di una forza eccitatrice.

In questo capitolo, in particolare, si analizzano le vibrazioni libere di sistemi aventi un solo grado di libertà, in assenza ed in presenza di smorzamento.

## 2 Vibrazioni libere non smorzate

Si consideri il sistema vibrante rappresentato in Figura 1a, costituito da una massa  $m$  collegata a terra mediante una molla di rigidità  $k$  e scorrevole sopra un piano privo di attrito.

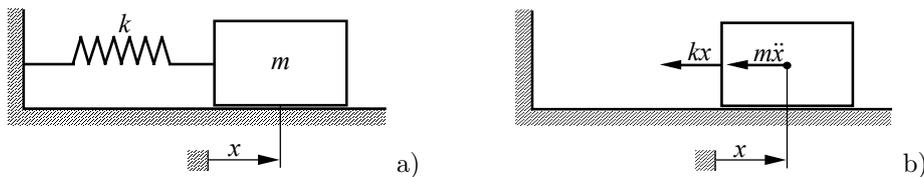


Figura 1: a) Sistema vibrante ad un grado di libertà privo di smorzamento. b) Forze agenti sulla massa  $m$  in direzione orizzontale.

Fissiamo un verso positivo per lo spostamento<sup>1</sup>  $x$  ed evidenziamo le forze agenti sulla massa  $m$  in direzione orizzontale (vedi Figura 1b); scrivendo la condizione di equilibrio dinamico in direzione orizzontale, si ottiene l'equazione di moto del sistema:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

La (1) è un'equazione differenziale lineare del 2° ordine, omogenea, a coefficienti costanti, la cui soluzione generale può essere calcolata considerando la soluzione di prova

$$x(t) = Ce^{\lambda t} \quad (2)$$

dove  $C$  e  $\lambda$  sono costanti da determinare. Sostituendo la (2) e la sua derivata seconda nell'equazione di moto (1) si ottiene:

$$Ce^{\lambda t}(m\lambda^2 + k) = 0 \quad (3)$$

Poiché il termine  $Ce^{\lambda t}$  risulta sempre diverso da zero, la (3) è soddisfatta se

$$m\lambda^2 + k = 0 \quad (4)$$

ovvero se

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega \quad (5)$$

<sup>1</sup>Quando si definisce una convenzione di segno per lo spostamento  $x$ , tale convenzione risulta valida anche per la velocità  $\dot{x} = dx/dt$  e per l'accelerazione  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ .

dove  $i$  rappresenta l'unità immaginaria ed  $\omega$  è definita dalla relazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6)$$

La (6) indica chiaramente che la grandezza  $\omega$ , detta *pulsazione propria* o *naturale*, è univocamente definita dalle caratteristiche inerziali (massa  $m$ ) ed elastiche (rigidezza  $k$ ) del sistema; come avremo modo di verificare nel seguito, la pulsazione propria è la pulsazione alla quale avvengono le vibrazioni libere non smorzate di un sistema ad un grado di libertà.

La (4) prende il nome di *equazione ausiliaria* o *caratteristica*, corrispondente all'equazione differenziale (1): si tratta di un'equazione algebrica nella variabile  $\lambda$ , che può essere ottenuta formalmente dalla corrispondente equazione differenziale, sostituendo la derivata  $n$ -esima di  $x(t)$  con  $\lambda^n$  (si osservi che la funzione  $x(t)$  può essere vista come la derivata di ordine zero e pertanto ad essa corrisponderà il termine  $\lambda^0 = 1$ ).

Poiché l'equazione caratteristica è soddisfatta da due differenti valori di  $\lambda$ , calcolabili mediante la (5), si avranno due soluzioni del tipo (2) e la soluzione generale della (1) si otterrà combinando linearmente tali soluzioni:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (7)$$

Le costanti di integrazione  $C_1$  e  $C_2$  sono complesse e vengono determinate imponendo le condizioni iniziali. Si osservi che, malgrado la presenza di quantità complesse nell'equazione (7), la funzione  $x(t)$  è reale, poiché rappresenta la legge con cui varia nel tempo lo spostamento della massa  $m$ . Se ora introduciamo nella (7) la formula di Eulero con  $\varphi = \pm\omega t$  si ottiene:

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (8)$$

avendo posto

$$A = C_1 + C_2 \quad B = i(C_1 - C_2) \quad (9)$$

Ponendo infine

$$A = X \sin \alpha \quad B = X \cos \alpha \quad (10)$$

la (8) può essere espressa nella forma:

$$x(t) = X(\sin \alpha \cos \omega t + \cos \alpha \sin \omega t) = X \sin(\omega t + \alpha) \quad (11)$$

dove le costanti di integrazione  $X$  ed  $\alpha$ , espresse in funzione di  $A$  e  $B$ , assumono le espressioni seguenti:

$$X = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \alpha = \arctan \frac{A}{B} \quad (12)$$

La (11) mostra chiaramente che la vibrazione libera del sistema è un moto armonico con pulsazione pari ad  $\omega$ ; si noti che l'ampiezza di oscillazione  $X$  risulta costante (ciò era prevedibile, non avendo considerato nel modello le dissipazioni energetiche).

Per determinare le costanti di integrazione è necessario imporre le condizioni iniziali; a tale scopo indichiamo rispettivamente con  $x_0$  e con  $\dot{x}_0$  lo spostamento e la velocità della massa  $m$  all'istante iniziale  $t = 0$ ; si avrà quindi:

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (13)$$

Se la soluzione è scritta nella forma (7) si ha:

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ \dot{x}_0 = i\omega C_1 - i\omega C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 - i \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) \\ C_2 = \frac{1}{2} \left( x_0 + i \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) \end{cases} \quad (14)$$

Per la soluzione nella forma (8) si ottiene:

$$\begin{cases} x_0 = A \\ \dot{x}_0 = \omega B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 \\ B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{cases} \quad (15)$$

Infine, se si utilizza la forma (11), le costanti di integrazione si calcolano immediatamente in base alle (12) e (15):

$$\begin{cases} X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \\ \alpha = \arctan \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0} \end{cases} \quad (16)$$

In Figura 2 è rappresentata graficamente la soluzione dell'equazione di moto (1); si osservi che la velocità iniziale  $\dot{x}_0$  è data dal coefficiente angolare della retta tangente alla curva in  $t = 0$ .

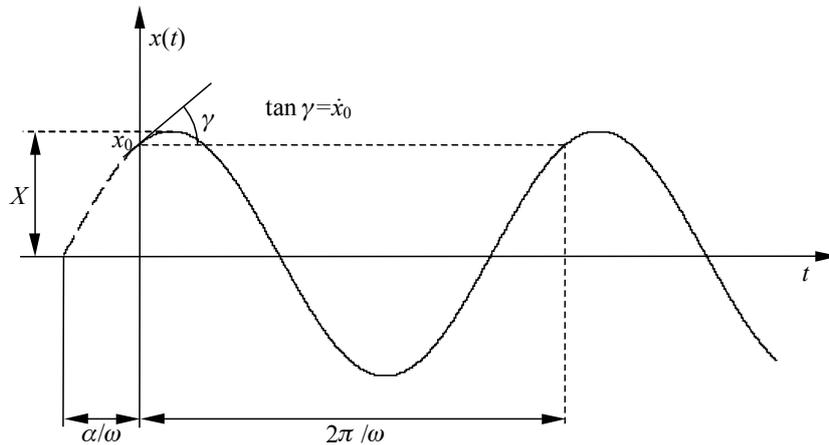


Figura 2: Grafico della funzione  $x(t)$ , soluzione dell'equazione di moto (1).

### 2.1 Effetto della gravità

Passiamo ora ad esaminare il comportamento dinamico del sistema massa-molla sotto l'effetto della gravità, ovvero quando le oscillazioni avvengono in direzione verticale.

L'equazione di moto (1) è ancora valida, purché la coordinata  $x$  venga misurata a partire dalla posizione di equilibrio statico (vedi Figura 3).

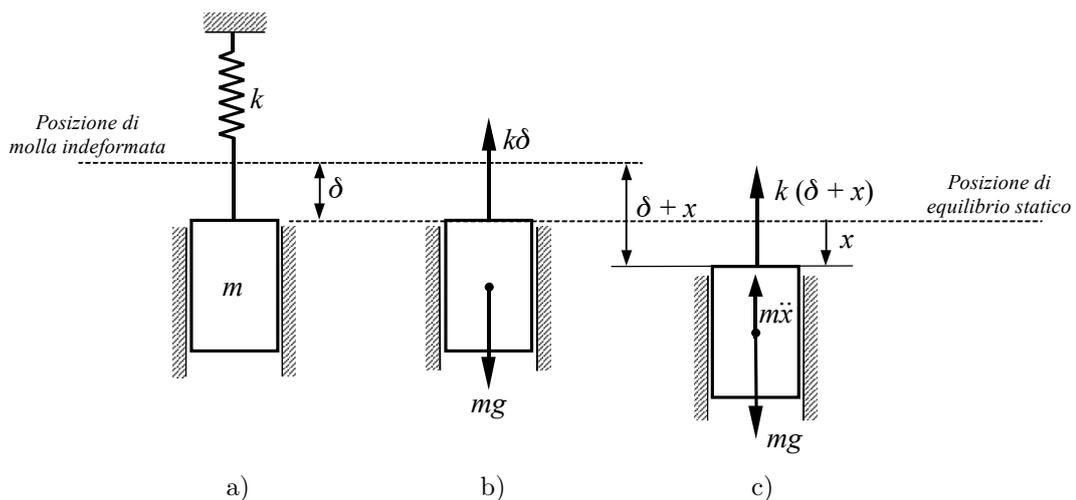


Figura 3: Sistema massa-molla sotto l'effetto della gravità. a) deformazione statica  $\delta$  generata dalla forza peso; b) forze agenti in condizioni di equilibrio statico; c) forze agenti durante il moto della massa  $m$ .

Infatti, in condizioni statiche, la forza esercitata dalla molla deve equilibrare il peso del corpo, ovvero:

$$k\delta = mg \quad (17)$$

dove  $\delta$  è la deformazione subita dalla molla per effetto della forza peso. Se  $x$  indica, come si è detto, lo scostamento rispetto alla posizione di equilibrio (considerato positivo verso il basso), l'equazione di moto della massa sospesa diviene:

$$m\ddot{x} + k(\delta + x) - mg = 0 \tag{18}$$

Tuttavia, poiché vale la (17), l'equazione che si ottiene è identica alla (1).

Per il calcolo della pulsazione propria  $\omega$  è sufficiente conoscere il valore della deformazione statica  $\delta$ ; dalla (17) si ha infatti:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \tag{19}$$

Ricordando poi che  $\omega = 2\pi f$  e che  $g = 9810 \text{ mm/s}^2$ , si ottiene

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \frac{\sqrt{9810}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\delta}} = \frac{15.76}{\sqrt{\delta}} \tag{20}$$

dove  $\delta$  è espresso in mm ed  $f$  in Hz.

**Esempio 1**

Per il carrello rappresentato schematicamente in Figura 4, supponendo che la ruota rotoli senza strisciare sul terreno e trascurando tutti i fenomeni di attrito, si chiede di:

- scrivere l'equazione di moto e calcolare la pulsazione propria;
- determinare la legge di moto, essendo note le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

dove  $x$  indica lo spostamento del baricentro della ruota, misurato rispetto alla posizione di equilibrio statico.

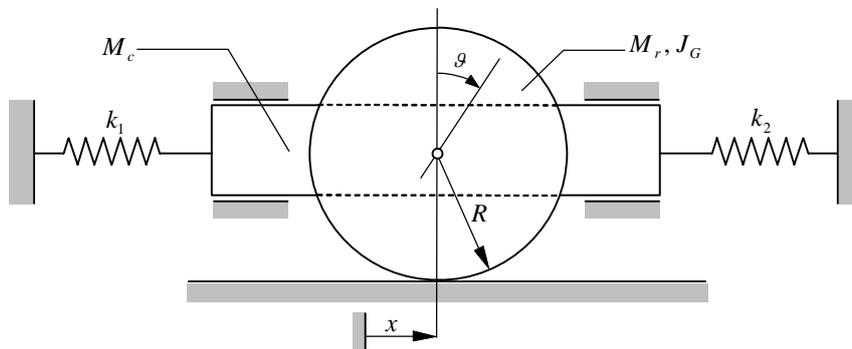


Figura 4: Carrello con molle.

**Dati**

- Massa del carrello .....  $M_c$
- Massa della ruota .....  $M_r$
- Momento d'inerzia baricentrico della ruota .....  $J_G$
- Rigidezze delle molle .....  $k_1, k_2$
- Raggio della ruota .....  $R$
- Condizioni iniziali .....  $x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = 0$

**Soluzione**

L'equazione di moto del sistema verrà ricavata utilizzando sia il *metodo degli equilibri dinamici* sia il *metodo energetico*.

**Metodo degli equilibri dinamici**

Per risolvere il problema con il metodo degli equilibri dinamici occorre in primo luogo evidenziare le forze che agiscono sul sistema carrello-ruota durante il moto (vedi Figura 5).

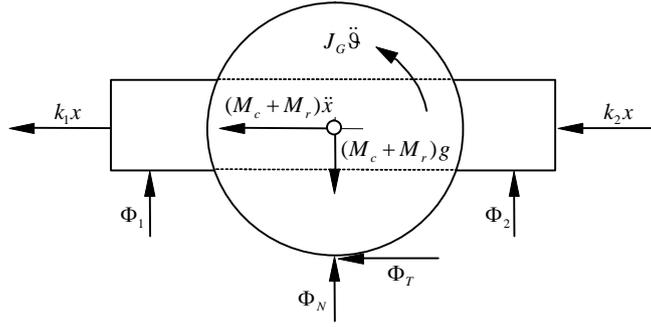


Figura 5: Forze agenti sul sistema carrello-ruota.

La coppia d'inerzia sulla ruota vale  $C_i = J_G \ddot{\vartheta}$ , dove  $\vartheta$  indica la rotazione della ruota stessa; se si ipotizza l'assenza di strisciamento fra ruota e terreno, è possibile correlare lo spostamento  $x$  del baricentro e la rotazione  $\vartheta$  tramite la relazione:

$$x = R\vartheta \quad [E.1]$$

A questo punto si possono scrivere le seguenti tre equazioni di equilibrio dinamico:

$$\begin{cases} \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_N - (M_c + M_r)g = 0 \\ (M_c + M_r)\ddot{x} + (k_1 + k_2)x + \Phi_T = 0 \\ \Phi_T R - J_G \ddot{\vartheta} = 0 \end{cases} \quad [E.2]$$

La prima e la seconda equazione del sistema sopra riportato esprimono rispettivamente l'equilibrio alla traslazione verticale ed orizzontale per l'intero sistema, mentre la terza equazione esprime l'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro per la sola ruota. Da quest'ultima relazione si può ricavare l'espressione della forza tangenziale  $\Phi_T$ :

$$\Phi_T = \frac{J_G}{R} \ddot{\vartheta} = \frac{J_G}{R^2} \ddot{x} \quad [E.3]$$

Sostituendo ora il valore di  $\Phi_T$  così calcolato nell'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale, si perviene all'equazione di moto:

$$\left( M_c + M_r + \frac{J_G}{R^2} \right) \ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0 \quad [E.4]$$

La pulsazione propria del sistema risulta quindi:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M_c + M_r + \frac{J_G}{R^2}}} = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}} \quad [E.5]$$

dove  $M_{eq} = M_c + M_r + J_G/R^2$  e  $K_{eq} = k_1 + k_2$  rappresentano rispettivamente la massa e la rigidità equivalente del sistema.

### Metodo energetico

La risoluzione con il metodo energetico consiste nell'esprimere la conservazione dell'energia meccanica totale (cinetica e potenziale) del sistema. Poiché sono gli attriti sono trascurabili e non vi sono forzanti esterne l'energia totale del sistema si mantiene costante; possiamo quindi scrivere:

$$T + V = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(T + V) = 0 \quad [E.6]$$

Esprimendo l'energia cinetica e potenziale in funzione della coordinata libera  $x$  otteniamo:

$$T = \frac{1}{2} \left( M_c + M_r + \frac{J_G}{R^2} \right) \dot{x}^2 \quad V = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x^2 \quad [E.7]$$

Derivando ora rispetto al tempo l'energia totale si ha:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \dot{x} \left[ \left( M_c + M_r + \frac{J_G}{R^2} \right) \ddot{x} + (k_1 + k_2)x \right] = 0 \quad [E.8]$$

da cui, essendo  $\dot{x} \neq 0$ , si ricava nuovamente l'equazione di moto

$$\left( M_c + M_r + \frac{J_G}{R^2} \right) \ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0 \quad [\text{E.9}]$$

### Risoluzione dell'equazione di moto

L'equazione di moto ottenuta è un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti; essa descrive le vibrazioni libere del sistema la sua soluzione è del tipo:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad [\text{E.10}]$$

dove  $A$  e  $B$  rappresentano due opportune costanti.

Derivando rispetto al tempo la soluzione  $x(t)$  si ricava l'andamento temporale della velocità:

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t \quad [\text{E.11}]$$

Le costanti  $A$  e  $B$  si determinano imponendo le condizioni iniziali assegnate dal testo:

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad [\text{E.12}]$$

Dalla prima condizione si ricava:

$$x(0) = A = x_0 \quad [\text{E.13}]$$

mentre dalla seconda si ottiene:

$$\dot{x}(0)\omega B = 0 \quad B = 0 \quad [\text{E.14}]$$

Pertanto la legge di moto è espressa dall'equazione:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad [\text{E.15}]$$

## 3 Vibrazioni libere con smorzamento viscoso

La Figura 6a rappresenta un sistema vibrante smorzato ad un grado di libertà; la forza smorzante  $F_s$  è di tipo viscoso e può quindi essere espressa tramite relazione

$$F_s = c\dot{x} \quad (21)$$

dove  $c$  è una costante di proporzionalità detta *coefficiente di smorzamento*.

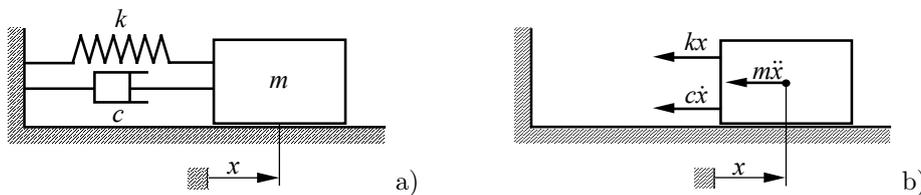


Figura 6: a) Sistema vibrante ad un grado di libertà con smorzamento viscoso. b) Forze agenti sulla massa  $m$  in direzione orizzontale.

L'equazione differenziale del sistema si ottiene scrivendo la condizione di equilibrio dinamico delle forze agenti in direzione orizzontale (vedi Figura 6b):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (22)$$

La soluzione generale della (22) si può calcolare utilizzando il procedimento già impiegato per il caso non smorzato; consideriamo dunque la soluzione di prova  $x(t) = Ce^{\lambda t}$  e sostituiamola nell'equazione di moto, unitamente alle sue derivate; dopo semplici passaggi si ottiene:

$$Ce^{\lambda t}(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0 \quad (23)$$

Poiché il termine  $Ce^{\lambda t}$  risulta sempre diverso da zero, la (23) è soddisfatta se

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (24)$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica (24) sono:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (25)$$

e possono risultare reali e distinte, reali e coincidenti o complesse e coniugate, a seconda del valore assunto dal discriminante.

La soluzione dell'equazione differenziale di moto risulta quindi:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (26)$$

Si definisce smorzamento critico  $c_c$  il valore del coefficiente di smorzamento  $c$  che annulla il discriminante dell'equazione caratteristica; si ha pertanto:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} = \omega^2 \quad (27)$$

ovvero:

$$c_c = 2m\omega = 2\sqrt{km} \quad (28)$$

Per valutare l'entità dello smorzamento rispetto al valore critico, si definisce un parametro adimensionale  $\xi$ , detto *fattore di smorzamento*, definito nel modo seguente:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (29)$$

Ricordando che  $\omega^2 = k/m$  e che, in base alla (29),  $c/2m = \xi\omega$ , la relazione (25) può essere riscritta nella forma

$$\lambda_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega \quad (30)$$

che mostra chiaramente come la natura delle radici  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dipenda dal valore di  $\xi$ .

Ponendo  $\xi = 0$  nella (30) si hanno due radici immaginarie pure (vedi equazione (5)): la vibrazione è di tipo non smorzato ed il caso è già stato esaminato nel paragrafo 2. Rimangono quindi da esaminare i seguenti tre casi:  $\xi < 1$  (sistema sottosmorzato),  $\xi = 1$  (sistema in condizioni di smorzamento critico),  $\xi > 1$  (sistema sovrasmorzato).

### 3.0.1 Caso n.1: sistema sottosmorzato ( $\xi < 1$ )

Se lo smorzamento è inferiore al valore critico, il discriminante dell'equazione caratteristica risulta negativo; le radici  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono quindi complesse e coniugate con parte reale negativa e possono essere espresse nel modo seguente:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1 - \xi^2} = -\xi\omega \pm i\omega_s \quad (31)$$

avendo posto per definizione:

$$\omega_s = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (32)$$

Sostituendo nella (26) i valori di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dati dalla (31) si ottiene l'espressione di  $x(t)$  sotto riportata:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (C_1 e^{i\omega_s t} + C_2 e^{-i\omega_s t}) \quad (33)$$

Il termine fra parentesi è analogo a quello dato dall'equazione (7), a meno della pulsazione, che ora risulta pari ad  $\omega_s$  anziché ad  $\omega$ .

Per quanto già visto a proposito delle vibrazioni in assenza di smorzamento, possiamo scrivere l'equazione precedente nelle due forme equivalenti sotto riportate:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t) \quad (34)$$

$$x(t) = X e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_s t + \alpha) \quad (35)$$

Imponendo le condizioni iniziali (13) si possono determinare le due costanti di integrazione; se la soluzione è scritta nella forma (33) si ha:

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ \dot{x}_0 = C_1(-\xi\omega + i\omega_s) - C_2(\xi\omega + i\omega_s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 - i \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_s} \right) \\ C_2 = \frac{1}{2} \left( x_0 + i \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_s} \right) \end{cases} \quad (36)$$

Per la soluzione nella forma (34) si ottiene:

$$\begin{cases} x_0 = A \\ \dot{x}_0 = \omega_s B - \xi\omega A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 \\ B = \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_s} \end{cases} \quad (37)$$

Infine, se si utilizza la forma (35), le costanti di integrazione si calcolano immediatamente in base alle (12) e (37):

$$\begin{cases} X = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_s} \right)^2} \\ \alpha = \arctan \frac{\omega_s x_0}{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0} \end{cases} \quad (38)$$

In Figura 7 è riportato l'andamento della funzione  $x(t)$  nel caso sottosmorzato; si osservi che il grafico risulta sempre limitato superiormente ed inferiormente da due funzioni esponenziali di equazione  $x(t) = \pm X e^{-\xi\omega t}$ .

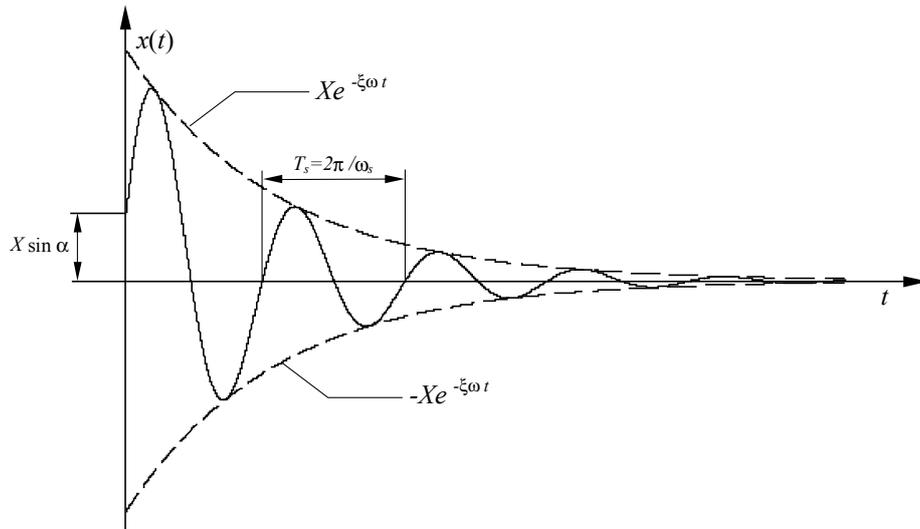


Figura 7: Andamento della funzione  $x(t)$  nel caso sottosmorzato.

Come si può notare, l'andamento di  $x(t)$  è di tipo oscillatorio pseudo-periodico: infatti, la vibrazione si riproduce con progressive attenuazioni dell'ampiezza, raggiungendo i valori massimi e minimi ad intervalli di tempo regolari; possiamo allora definire un periodo  $T_s$  delle oscillazioni smorzate nel modo seguente

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (39)$$

dove  $T = 2\pi/\omega$  indica il periodo proprio delle vibrazioni non smorzate.

L'effetto dello smorzamento si manifesta in questo caso sia con una progressiva riduzione dell'ampiezza di oscillazione (dovuta al termine esponenziale decrescente) sia con un aumento del periodo di oscillazione (vedi equazione (39)); tuttavia, se il coefficiente di smorzamento è molto piccolo rispetto al valore critico (ovvero  $\xi \ll 1$ ), si ha con buona approssimazione  $\omega_s \simeq \omega$  e  $T_s \simeq T$ ; pertanto non si rilevano sensibili variazioni della pulsazione e del periodo proprio rispetto al caso non smorzato.

### 3.0.2 Caso n.2: sistema in condizioni di smorzamento critico ( $\xi = 1$ )

Per  $\xi = 1$  l'equazione caratteristica fornisce due soluzioni reali e coincidenti:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c_c}{2m} = -\omega \quad (40)$$

A causa della radice doppia, la soluzione dell'equazione di moto assume la forma<sup>2</sup>:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega t} \quad (41)$$

Come di consueto, calcoliamo le costanti di integrazione imponendo le condizioni iniziali (13):

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \\ \dot{x}_0 = C_2 - \omega C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = \dot{x}_0 + \omega x_0 \end{cases} \quad (42)$$

La Figura 8 mostra tre possibili andamenti della funzione  $x(t)$ , calcolati per  $\dot{x}_0 > 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$  e  $\dot{x}_0 < 0$ , nell'ipotesi che lo spostamento iniziale  $x_0$  sia positivo.

Si noti la scomparsa del comportamento oscillatorio, riscontrato nel caso sottosmorzato.

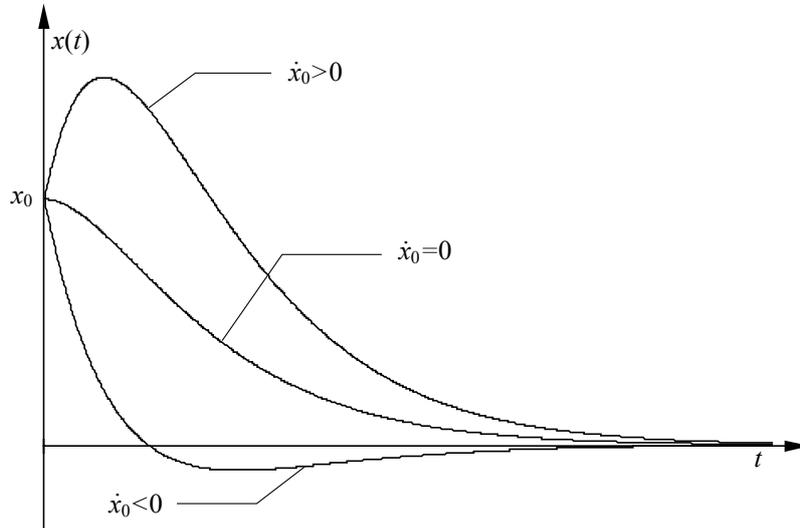


Figura 8: Possibili andamenti della funzione  $x(t)$  in condizioni di smorzamento critico.

Occorre infine osservare come la (41) possa essere ricavata come limite per  $\xi \rightarrow 1$  della soluzione  $x(t)$  relativa al caso sottosmorzato (equazione (34)), che qui riscriviamo per comodità:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ x_0 \cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) \right] \quad (43)$$

Per  $\xi \rightarrow 1$  il termine esponenziale tende a  $e^{-\omega t}$ , il primo addendo all'interno della parentesi quadra tende ad  $x_0$ , mentre il limite del secondo addendo si può calcolare nel modo seguente:

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \left[ (\dot{x}_0 + \xi\omega x_0) \frac{\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \right] = (\dot{x}_0 + \omega x_0) \lim_{\omega_s \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} = (\dot{x}_0 + \omega x_0)t \quad (44)$$

<sup>2</sup>Come è noto dall'Analisi Matematica, la soluzione di un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine  $n$  si ottiene mediante combinazione lineare di  $n$  integrali particolari, ciascuno dei quali corrisponde ad una radice dell'equazione caratteristica associata: alle soluzioni  $\lambda$  semplici corrispondono termini del tipo  $e^{\lambda t}$ , mentre alle soluzioni  $\lambda$  con molteplicità pari ad  $r > 1$ , corrispondono  $r$  integrali particolari del tipo:

$$x_1(t) = e^{\lambda t}, \quad x_2(t) = t e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad x_r(t) = t^{r-1} e^{\lambda t}$$

Nel nostro caso la soluzione  $\lambda = -\omega$  ha molteplicità  $r = 2$  e quindi la soluzione dell'equazione differenziale risulta:

$$x(t) = C_1 e^{-\omega t} + C_2 t e^{-\omega t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega t}$$

Pertanto la soluzione risulta:

$$x(t) = e^{-\omega t} [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega x_0)t] \quad (45)$$

Un sistema in condizioni di smorzamento critico presenta il minimo valore di smorzamento che permette di ottenere l'assenza di oscillazioni (comportamento aperiodico); pertanto la massa ritorna nella posizione di equilibrio nel più breve tempo possibile, senza generare vibrazioni; questa proprietà viene spesso sfruttata nella progettazione di smorzatori da abbinare a dispositivi meccanici per i quali si richiede un rapido recupero delle condizioni di equilibrio ed, al tempo stesso, un efficace abbattimento delle vibrazioni.

### 3.0.3 Caso n.3: sistema sovrasmorzato ( $\xi > 1$ )

Per  $\xi > 1$  le radici dell'equazione caratteristica risultano reali e negative:

$$\lambda_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega = (-\xi \pm \gamma)\omega \quad (46)$$

dove si è posto  $\gamma = \sqrt{\xi^2 - 1}$ . In questo caso la soluzione risulta somma di due funzioni esponenziali decrescenti:

$$x(t) = C_1 e^{-(\xi-\gamma)\omega t} + C_2 e^{-(\xi+\gamma)\omega t} \quad (47)$$

Il moto risultante è ancora di tipo aperiodico (vedi Figura 9), come avveniva in condizioni di smorzamento critico.

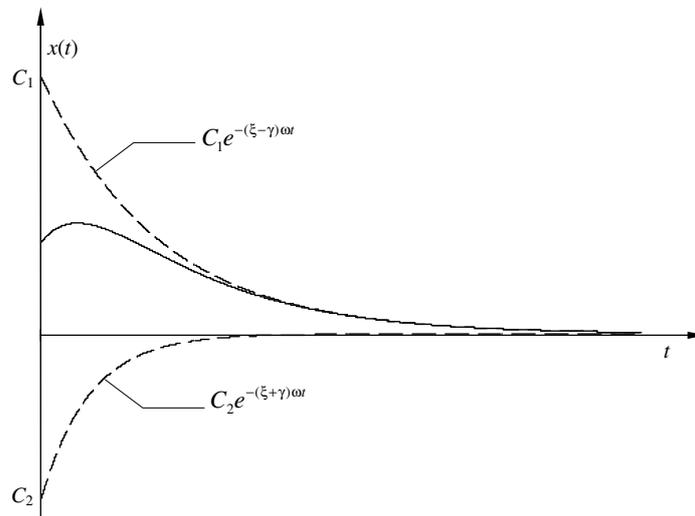


Figura 9: Andamento della funzione  $x(t)$  nel caso sovrasmorzato.

Per il calcolo delle costanti di integrazione imponiamo, come al solito, le condizioni iniziali: svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ \dot{x}_0 = C_1\omega(-\xi + \gamma) + C_2\omega(-\xi - \gamma) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{\dot{x}_0 + \omega x_0(\xi + \gamma)}{2\omega\gamma} \\ C_2 = -\frac{\dot{x}_0 + \omega x_0(\xi - \gamma)}{2\omega\gamma} \end{cases} \quad (48)$$

## 3.1 Luogo delle radici

Una visione sintetica alquanto efficace dei tre casi sopra esaminati viene ottenuta ricorrendo alla rappresentazione grafica, nel piano complesso, delle posizioni assunte dalle radici  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dell'equazione caratteristica al variare del fattore di smorzamento  $\xi$ ; tale rappresentazione viene chiamata *luogo delle radici* ed è riportata in Figura 10.

Come si può notare, per  $\xi = 0$  (assenza di smorzamento) le radici sono numeri immaginari puri e si trovano sull'asse immaginario in posizioni simmetriche rispetto all'origine (punti A e B in Figura 10); per  $0 < \xi < 1$  le radici sono complesse e coniugate con parte reale negativa e descrivono al variare di  $\xi$  due archi di circonferenza di raggio  $\omega$  nel 2° e 3° quadrante; per  $\xi = 1$  le radici sono reali e coincidenti e giacciono sull'asse reale a sinistra

dell'origine e a distanza  $\omega$  da quest'ultima (punto C in Figura 10); infine, per  $\xi > 1$  le radici sono reali e distinte e si allontanano dal punto C, percorrendo l'asse reale e mantenendosi sempre a sinistra dell'origine (infatti tali radici risultano sempre negative per qualsiasi valore di  $\xi$  maggiore dell'unità).

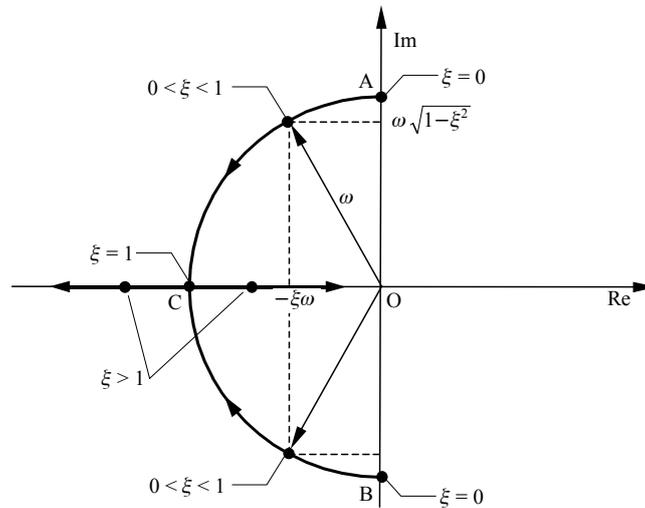


Figura 10: Luogo delle radici dell'equazione caratteristica al variare del fattore di smorzamento  $\xi$ .

### 3.2 Decremento logaritmico

Per i sistemi sottosmorzati l'entità dello smorzamento può essere determinata facilmente misurando la progressiva riduzione dell'ampiezza di oscillazione con il trascorrere del tempo; quanto maggiore è lo smorzamento, tanto più elevata risulta la velocità di decadimento delle oscillazioni. Consideriamo la soluzione  $x(t)$  relativa al caso sottosmorzato, la cui rappresentazione grafica è riportata in Figura 11.

$$x(t) = X e^{-\xi\omega t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega t + \alpha) \tag{49}$$

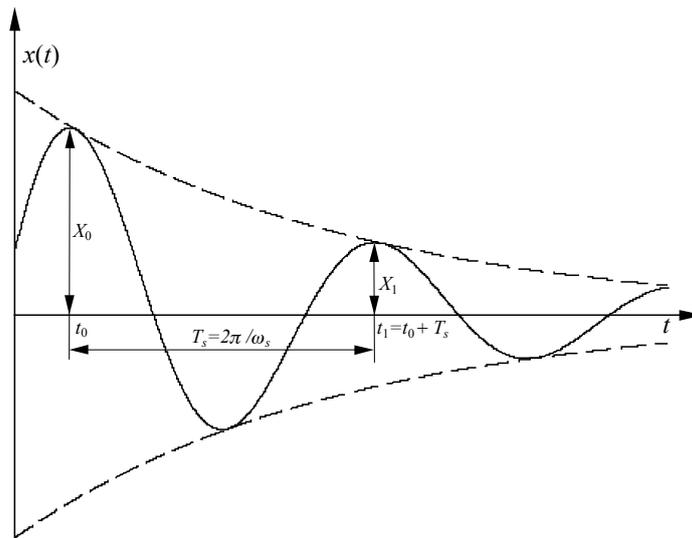


Figura 11: Decadimento dell'ampiezza di vibrazione misurata dal decremento logaritmico.

Introduciamo ora un parametro chiamato *decremento logaritmico*, definito come il logaritmo naturale del rapporto fra le ampiezze di due punti omologhi consecutivi<sup>3</sup> (per esempio due massimi relativi); in base a tale

<sup>3</sup>Si definiscono *punti omologhi consecutivi* due punti separati da un intervallo temporale pari a  $T_s$ ; nel caso di Figura 11 i punti  $t_0$  e  $t_1 = t_0 + T_s$ , sono punti omologhi corrispondenti al massimo dell'ampiezza.

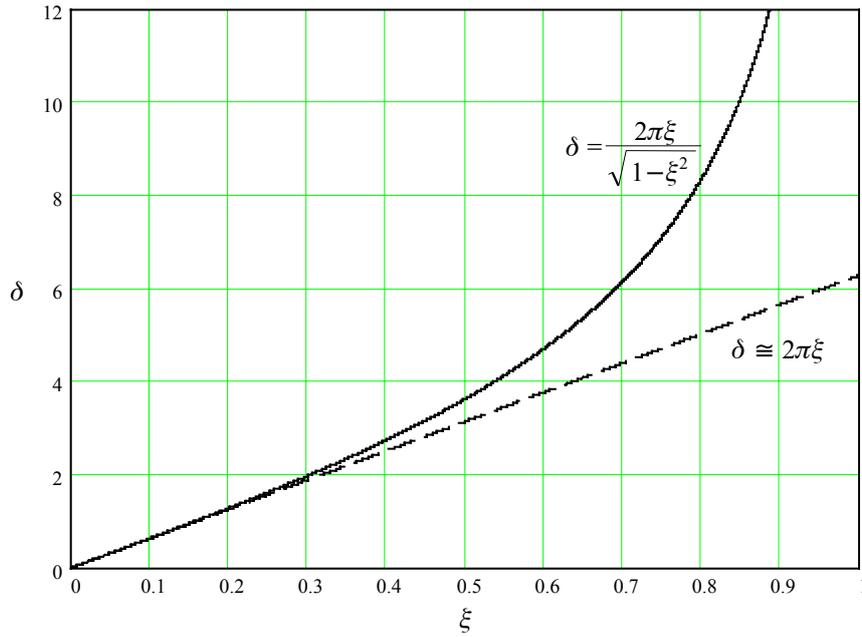


Figura 12: Decremento logaritmico in funzione del fattore di smorzamento.

definizione l'espressione del decremento logaritmico diviene:

$$\delta = \ln \left( \frac{X_0}{X_1} \right) = \ln \left\{ \frac{e^{-\xi\omega t_0} \sin(\omega_s t_0 + \alpha)}{e^{-\xi\omega(t_0+T_s)} \sin[\omega_s(t_0 + T_s) + \alpha]} \right\} \quad (50)$$

Poiché i valori che assume la funzione seno sono uguali quando il tempo viene incrementato di una quantità pari al periodo delle oscillazioni smorzate  $T_s$ , la relazione precedente si riduce a:

$$\delta = \ln \left( \frac{e^{-\xi\omega t_0}}{e^{-\xi\omega(t_0+T_s)}} \right) = \ln e^{\xi\omega T_s} = \xi\omega T_s \quad (51)$$

Ricordando ora la (39), si ottiene la relazione:

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (52)$$

che, risolta rispetto a  $\xi$ , permette di calcolare il fattore di smorzamento in funzione del decremento logaritmico:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad (53)$$

Il metodo sopra illustrato si rivela assai utile quando occorre ricavare per via sperimentale l'entità dello smorzamento; infatti, rilevando tramite un'opportuna strumentazione l'andamento delle oscillazioni nel tempo, è possibile calcolare  $\delta$  in base alla definizione (50) e successivamente ricavare il valore di  $\xi$  mediante la (53). Per piccoli valori di  $\xi$  si ha  $\sqrt{1-\xi^2} \simeq 1$ , e pertanto si possono utilizzare, in luogo delle (52) e (53), le espressioni semplificate

$$\delta \simeq 2\pi\xi \quad \xi \simeq \frac{\delta}{2\pi} \quad (54)$$

La Figura 12 mostra i valori esatti ed approssimati di  $\delta$  in funzione di  $\xi$ ; si osservi come l'errore che si commette utilizzando le espressioni approssimate (54) risulti significativo solo per  $\xi > 0.3$ .

Il fattore di smorzamento può essere calcolato anche misurando due ampiezze corrispondenti a punti omologhi non consecutivi (cioè separati da un numero intero di periodi); infatti, se indichiamo con i simboli  $X_0$  ed  $X_n$  le ampiezze corrispondenti agli istanti  $t_0$  e  $t_n = t_0 + nT_s$ , la definizione di decremento logaritmico consente di scrivere la seguente relazione:

$$e^\delta = \frac{X_0}{X_1} = \frac{X_1}{X_2} = \dots = \frac{X_{n-1}}{X_n} \quad (55)$$

Si ha pertanto:

$$\frac{X_0}{X_n} = \left(\frac{X_0}{X_1}\right) \left(\frac{X_1}{X_2}\right) \cdots \left(\frac{X_{n-1}}{X_n}\right) = e^{n\delta} \quad (56)$$

da cui:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{X_0}{X_n}\right) \quad (57)$$