Sistemi ad un grado di libertà: deduzione dell'equazione di moto

1 Introduzione

In questo capitolo verranno descritti alcuni metodi che consentono di ricavare l'equazione di moto di un sistema vibrante.

Come è noto, le tecniche per la determinazione delle equazioni di moto si riconducono sostanzialmente a due categorie:

a) tecniche di tipo "newtoniano", che utilizzano il concetto di equilibrio dinamico o l'equazione fondamentale della dinamica (Forza = Massa × Accelerazione)[1];
b) tecniche basate sull'approccio energetico.

Le tecniche appartenenti al gruppo a) risultano molto intuitive, poiché richiedono semplicemente di considerare le forze agenti su un sistema o su parte di esso; tuttavia, per sistemi complessi, occorre introdurre incognite aggiuntive, rappresentate ad esempio dalle azioni scambiate fra i membri di un meccanismo o dalle reazioni vincolari; tali incognite possono essere calcolate scrivendo ulteriori condizioni di equilibrio dinamico relative al sistema globale o ad un particolare sottosistema. Per applicare le tecniche appartenenti al gruppo b) occorre invece calcolare energie, lavori o potenze ed effettuare operazioni di derivazione: tali metodi, pur essendo meno intuitivi, risultano più efficienti, in quanto non richiedono l'introduzione di incognite supplementari (infatti non occorre scindere un dato sistema in più sottosistemi ed evidenziare forze interne o reazioni vincolari); solitamente l'approccio energetico è vantaggioso nello studio di casi complessi.

Nei paragrafi seguenti ricaveremo l'equazione di moto del sistema vibrante ad un grado di libertà rappresentato in Figura 1, utilizzando le tecniche sotto elencate:

- Metodo degli equilibri dinamici;
- Teorema delle potenze;
- Conservazione dell'energia totale;
- Principio dei lavori virtuali;
- Equazioni di Lagrange.

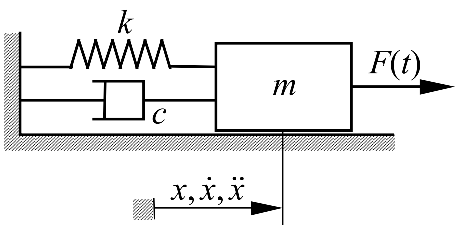

Figura 1: Sistema vibrante elementare ad un grado di libertà.

[1] In questo caso il termine "forza" va inteso in senso generalizzato: esso vuole infatti indicare azioni forzanti espresse in termini di forze in senso stretto, ma anche in termini di coppie.

2 Metodo degli equilibri dinamici

La seconda legge della dinamica formulata da Newton si enuncia con la nota equazione

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

dove $\sum \vec{F}$, m ed $\vec{a}$ indicano rispettivamente la risultante delle forze applicate, la massa e l'accelerazione del corpo di cui si vuole studiare la dinamica. Se indichiamo con $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$ la forza d'inerzia, la (1) diviene:

$$\sum \vec{F} + \vec{F}_{in} = 0 \tag{2}$$

che traduce la condizione di equilibrio dinamico del sistema. L'equazione (2) può essere riscritta nella forma

$$\sum \vec{F}^* = 0 \tag{3}$$

dove l'asterisco indica che nella sommatoria delle forze è inclusa anche la forza d'inerzia. In questo modo, qualsiasi problema di dinamica può essere formulato come un problema di statica, a patto di considerare nelle equazioni di equilibrio anche gli effetti inerziali (principio di D'Alembert).

Per applicare il metodo degli equilibri dinamici al sistema di Figura 1 occorre in primo luogo evidenziare tutte le forze agenti sul sistema, disegnando il diagramma di corpo libero. Utilizzando per lo spostamento, la velocità e l'accelerazione le convenzioni di segno indicate in Figura 1, le forze agenti sulla massa m durante il moto sono quelle rappresentate in Figura 2.

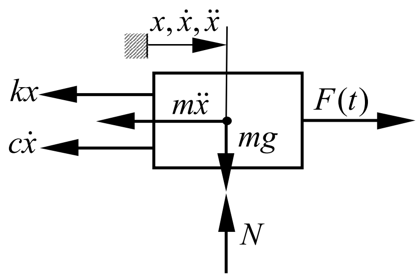

Figura 2: Diagramma di corpo libero per il sistema di Figura 1.

La condizione di equilibrio alla traslazione verticale permette di calcolare la reazione del piano di appoggio, il cui modulo è uguale in ogni istante al peso del corpo ($N = mg$); la condizione di equilibrio alla traslazione orizzontale fornisce invece l'equazione di moto del sistema, che risulta:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{4}$$

3 Teorema delle potenze

Il teorema delle potenze è espresso dalla relazione seguente

$$\sum W = \frac{dT}{dt} \tag{5}$$

in cui $\sum W$ indica la somma di tutte le potenze in gioco mentre T indica l'energia cinetica del sistema.

Per un corpo di massa m in moto traslatorio con velocità $\vec{v}$ l'energia cinetica risulta:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} \tag{6}$$

Derivando la (6) si ottiene:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}[m\vec{a}\cdot\vec{v} + m\vec{v}\cdot\vec{a}] = m\vec{a}\cdot\vec{v} \tag{7}$$

essendo $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ l'accelerazione del corpo.

Avendo definito la forza d'inerzia mediante la relazione $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$, la (7) diviene:

$$\frac{dT}{dt} = -\vec{F}_{in} \cdot \vec{v} = -W_{in} \tag{8}$$

ovvero, la derivata dell'energia cinetica è uguale alla potenza W_{in} della forza d'inerzia, cambiata di segno. Dalle (5) e (8) si ha quindi:

$$\sum W + W_{in} = 0 \tag{9}$$

ovvero

$$\sum W^* = 0 \tag{10}$$

dove l'asterisco indica che, nella sommatoria delle potenze, è inclusa anche la potenza della forza d'inerzia. Per dedurre l'equazione di moto del sistema di Figura 1 mediante il teorema delle potenze (scritto nella forma (5)), occorre considerare al primo membro dell'equazione i contributi della forza elastica, della forza smorzante e della forza eccitante F; le potenze della forza peso e della reazione verticale N non compaiono nell'equazione poiché risultano nulle (tali forze sono infatti ortogonali alla direzione della velocità). Sulla base di quanto si è affermato si ottiene:

$$(-kx)\dot{x} + (-c\dot{x})\dot{x} + F\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) \tag{11}$$

ovvero:

$$\dot{x}(-kx - c\dot{x} + F) = m\dot{x}\ddot{x} \tag{12}$$

Riordinando i termini e semplificando $\dot{x}$ si ricava nuovamente l'equazione (4).

4 Conservazione dell'energia totale

Il principio di conservazione dell'energia afferma che il lavoro L_{nc}, compiuto da tutte le forze *non conservative* agenti su un sistema, è uguale alla variazione di energia totale E_{tot} del sistema stesso; quest'ultima risulta pari alla somma dell'energia cinetica T e dell'energia potenziale V (elastica e gravitazionale):

$$E_{tot} = T + V \tag{13}$$

Utilizzando il simbolo Δ per indicare il concetto di "variazione", il principio suddetto assume la seguente formulazione:

$$L_{nc} = \Delta E_{tot} = \Delta(T + V) \tag{14}$$

Solitamente le forze non conservative agenti su un sistema meccanico sono rappresentate dalle azioni forzanti esterne e dalle azioni dissipative, dovute ai fenomeni d'attrito e alla presenza di elementi smorzanti.

Traducendo l'equazione (14) in termini differenziali possiamo scrivere:

$$W_{nc} = \frac{d}{dt}(T + V) \tag{15}$$

dove $W_{nc} = dL_{nc}/dt$ indica la potenza delle forze non conservative.

Se il sistema è privo di elementi dissipativi (che sottraggono energia al sistema) e non è sottoposto all'azione di forzanti esterne (che compiono lavoro sul sistema) si ha

$$T + V = \text{cost.} \tag{16}$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0 \tag{17}$$

L'equazione (17) si rivela di grande utilità per lo studio delle vibrazioni libere di sistemi ad un grado di libertà privi di smorzamento.

A titolo di esempio, ricaviamo l'equazione di moto per il sistema di Fig 1 mediante il principio di conservazione dell'energia. Poiché sono presenti la forzante esterna F ed l'azione dissipativa generata dallo smorzatore, occorre utilizzare l'equazione (15).

La potenza W_{nc} delle forze non conservative è data dalla seguente espressione

$$W_{nc} = \frac{dL_{nc}}{dt} = F\frac{dx}{dt} + (-c\dot{x})\frac{dx}{dt} = F\dot{x} - c\dot{x}^2 \tag{18}$$

mentre la derivata rispetto al tempo dell'energia totale del sistema risulta

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} \tag{19}$$

Sostituendo nella (15) le espressioni sopra ricavate si ottiene

$$F\dot{x} - c\dot{x}^2 = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} \tag{20}$$

da cui, semplificando $\dot{x}$, e riordinando i termini si ricava nuovamente l'equazione di moto (4).

5 Principio dei lavori virtuali

Il principio dei lavori virtuali, formulato per la prima volta dal matematico svizzero Johann J. Bernoulli nel 1717, risulta assai utile per lo studio di sistemi meccanici ad uno o più gradi di libertà; il principio può essere enunciato nella forma seguente:

Se ad un sistema in equilibrio sotto l'azione di un dato insieme di forze viene imposto uno spostamento virtuale, il lavoro virtuale compiuto da tali forze risulta globalmente nullo; viceversa, se il lavoro virtuale compiuto da un insieme di forze su un sistema risulta globalmente nullo, il sistema stesso è in equilibrio sotto quel dato insieme di forze.

Si ricordi a questo proposito che:

- lo *spostamento virtuale* è una variazione infinitesima della coordinata libera, data istantaneamente e compatibile con i vincoli;
- il *lavoro virtuale* è il lavoro compiuto da tutte le forze agenti sul sistema quando viene imposto uno spostamento virtuale. Poiché allo spostamento virtuale non è associata una variazione significativa della geometria, il calcolo del lavoro virtuale si effettua considerando esenti da variazioni le forze agenti sul sistema.

Il principio dei lavori virtuali fornisce una condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio e quindi trova la sua naturale applicazione nei problemi di statica; tuttavia, se nel sistema di forze si considerano anche le azioni inerziali (principio di D'Alembert), tale principio risulta immediatamente applicabile anche a problemi di dinamica, permettendo di ricavare con facilità le equazioni di moto di un sistema.

La formulazione matematica del principio dei lavori virtuali è la seguente:

$$\sum \vec{F}^* \cdot \delta\vec{r} = 0 \tag{21}$$

dove $\delta\vec{r}$ indica lo spostamento virtuale. Con riferimento al sistema di Figura 1, se si assegna uno spostamento virtuale $\delta\vec{r} = \delta\vec{x}$ si ha:

$$-m\ddot{x}\delta x - c\dot{x}\delta x - kx\delta x + F(t)\delta x = 0 \tag{22}$$

da cui, semplificando δx e riordinando i termini, si ottiene nuovamente l'equazione di moto (4).

6 Equazioni di Lagrange

Le equazioni di Lagrange consentono di ricavare facilmente le equazioni di moto di sistemi meccanici comunque complessi, senza effettuare considerazioni di equilibrio dinamico sul sistema o su alcune sue parti. Esse permettono quindi di studiare la dinamica di qualsiasi sistema meccanico: a uno o più gradi di libertà, lineare o non lineare.

Prima di applicare l'approccio lagrangiano all'oscillatore di Figura 1, si forniscono in questa sede alcuni cenni preliminari di tipo generale, riguardanti le diverse notazioni con cui le equazioni di Lagrange sono indicate nei testi di Meccanica teorica più diffusi.

Siano $q_1, q_2, \ldots, q_n$ le coordinate libere (parametri lagrangiani) di un generico sistema meccanico ad n gradi di libertà; per tale sistema le equazioni di Lagrange assumono la forma seguente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\delta L_{nc}}{\delta q_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{23}$$

dove T e V indicano, come di consueto, l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema, mentre L_{nc} rappresenta il lavoro di tutte le forze non conservative agenti sul sistema (forzanti esterne ed azioni smorzanti).

Il contributo delle azioni smorzanti può essere considerato, in modo alternativo, introducendo un'apposita funzione detta *funzione di dissipazione di Rayleigh*, solitamente indicata con il simbolo $\mathcal{R}$. In questo caso le equazioni di Lagrange assumono la forma seguente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\delta L_F}{\delta q_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{24}$$

dove il simbolo L_F indica il lavoro delle sole forzanti esterne (non conservative).

Talvolta le equazioni di Lagrange vengono formulate introducendo la funzione *Lagrangiana* $\mathcal{L}$, definita come differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema:

$$\mathcal{L} = T - V \tag{25}$$

Utilizzando la definizione della Lagrangiana sopra riportata e ricordando che $\partial V/\partial \dot{q}_i = 0$ (infatti l'energia potenziale non dipende dalla velocità) le equazioni (23) si possono riscrivere nella forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\delta L_{nc}}{\delta q_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{26}$$

Utilizzando invece la forma (24) si ha invece:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\delta L_F}{\delta q_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{27}$$

Passiamo ora a considerare il sistema di Figura 1; essendo $q = x$ l'unico parametro lagrangiano (il sistema ha infatti un solo grado di libertà) si può scrivere una sola equazione di Lagrange. Adottando la forma (23) si ha:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\delta L_{nc}}{\delta x} \tag{28}$$

L'energia cinetica, l'energia potenziale e le loro derivate risultano:

$$\begin{aligned} &T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ &V = \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} = kx \end{aligned} \tag{29}$$

Per il calcolo del secondo membro dell'equazione (28) occorre considerare il lavoro elementare delle forze non conservative, costituite dalla forzante esterna e dalla forza dello smorzatore; per uno spostamento δx della massa, tale lavoro risulta:

$$\delta L_{nc} = F(t)\delta x + (-c\dot{x})\delta x \tag{30}$$

da cui $\delta L_{nc}/\delta x = F(t) - c\dot{x}$.

Sostituendo i termini suddetti nella (28) si ricava immediatamente l'equazione di moto dell'oscillatore armonico. Se si preferisce utilizzare la forma (24) si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\delta L_F}{\delta x} \tag{31}$$

Per il nostro sistema ad un grado di libertà la funzione di dissipazione è definita nel modo seguente:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \tag{32}$$

Si ha quindi $\partial\mathcal{R}/\partial\dot{x} = c\dot{x}$.

Il lavoro delle forzanti esterne risulta invece: $\delta L_F = F(t)\delta x$, da cui $\delta L_F/\delta x = F(t)$.

Come il lettore può facilmente verificare, sostituzione dei vari termini nella (31) fornisce ancora una volta la nota equazione di moto.