

Generalità sulle vibrazioni meccaniche

1 Introduzione

La Meccanica delle Vibrazioni ha come obiettivo lo studio dei fenomeni oscillatori dei sistemi meccanici e delle forze che li generano.

Un sistema vibrante, in generale, include un elemento in grado di immagazzinare *energia potenziale* (*molla* oppure *massa soggetta ad un campo gravitazionale*), un elemento in grado di immagazzinare *energia cinetica* (*massa*) ed un elemento in grado di dissipare energia (*smorzatore*); in assenza di smorzamento e di forzanti esterne, l'energia *totale* del sistema (potenziale + cinetica) rimane costante nel tempo ed il sistema continua ad oscillare indefinitamente, mantenendo costante l'ampiezza dell'oscillazione.

In ogni caso la vibrazione meccanica è un fenomeno che comporta la trasformazione di energia da potenziale a cinetica e viceversa; se il sistema è smorzato, una certa quantità di energia viene dissipata in ogni ciclo e deve essere integrata da una sorgente esterna se si vuole mantenere uno stato di vibrazione permanente; se ciò non si verifica, la vibrazione si riduce progressivamente fino ad annullarsi.

Si noti che lo smorzamento viene talvolta generato “artificialmente” mediante l'impiego di opportuni componenti (è il caso degli ammortizzatori utilizzati nelle sospensioni degli autoveicoli); tuttavia, anche in assenza di tali dispositivi, è sempre presente, nei sistemi reali, uno smorzamento “naturale”, attribuibile alla presenza di attrito fra superfici in moto relativo.

2 Gradi di libertà

Come è noto, per descrivere analiticamente il moto di un generico sistema meccanico è necessario definire un insieme di coordinate che permettano di individuare senza ambiguità la sua posizione ad ogni istante di tempo; il minimo numero di coordinate *indipendenti* che consente di definire in modo univoco la posizione del sistema suddetto è pari al numero dei *gradi di libertà* (GDL)¹.

In generale il numero n di gradi di libertà si ottiene come differenza fra il numero i di coordinate utilizzate per definire la posizione del sistema ed il numero j di relazioni indipendenti che legano le coordinate suddette; si ha pertanto

$$n = i - j \quad (1)$$

A titolo di esempio si riportano in Figura 1 due esempi di sistemi meccanici. Il sistema di Figura 1a ha un solo grado di libertà, in quanto esiste una relazione cinematica fra lo spostamento x del piede di biella e l'angolo di manovella ϑ ; il sistema di Figura 1b possiede invece due gradi di libertà, poiché le coordinate x e ϑ risultano indipendenti.

3 Sistemi discreti e sistemi continui

Un grande numero di sistemi può essere analizzato ricorrendo a modelli con un numero finito di gradi di libertà; la schematizzazione ad n gradi di libertà cade però in difetto qualora si voglia studiare la dinamica di un sistema con massa ed elasticità distribuite.

A titolo di esempio si consideri la trave continua rappresentata in Figura 2.

Poiché la trave presenta un numero *infinito* di punti, occorre un numero infinito di coordinate per definire la sua deformata; pertanto la deformata, ad un dato istante t , risulterà definita univocamente assegnando la funzione $y(x, t)$, dove y rappresenta la freccia ed x la variabile spaziale (trattandosi di un numero reale, x può assumere infiniti valori compresi fra 0 ed L).

Sulla base di quanto si è affermato, è possibile classificare i sistemi vibranti nelle due categorie seguenti:

¹La terminologia anglosassone equivalente a “gradi di libertà” è “degrees of freedom” (DOF).

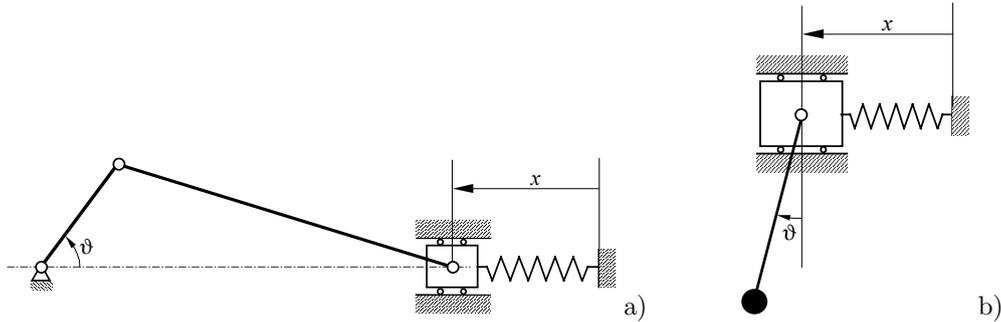


Figura 1: Sistemi meccanici ad 1 grado di libertà (a) e a 2 gradi di libertà (b).

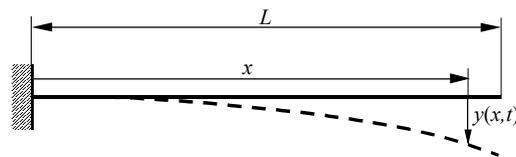


Figura 2: Esempio di sistema con massa ed elasticità distribuite.

- *sistemi discreti o a parametri concentrati*: sono sistemi in cui i parametri di massa, elasticità e smorzamento sono localizzati in opportune zone; tali sistemi possiedono un numero *finito* di gradi di libertà;
- *sistemi continui o a parametri distribuiti*: per tali sistemi si considera l'effettiva distribuzione di massa, elasticità e smorzamento, cioè la *continuità* nel senso matematico del termine; in questo secondo caso si hanno *infiniti gradi di libertà*, dal momento che non è possibile individuare punti particolari in cui concentrare i parametri suddetti.

In molti casi i sistemi continui vengono approssimati mediante schematizzazioni a parametri concentrati, al fine di semplificare la trattazione analitica del problema.

Sebbene lo studio di un sistema come “continuo” fornisca risultati esatti, le metodologie di calcolo disponibili per l'analisi di sistemi continui sono limitate ad una ristretta selezione di problemi (travi uniformi, aste snelle, piastre sottili, ecc.); pertanto la maggior parte dei sistemi che si incontrano nella pratica viene studiata mediante modelli discreti.

In generale, risultati più accurati si possono ottenere incrementando il numero di masse, molle e smorzatori, ovvero incrementando il numero di gradi di libertà; utilizzando tale approccio, l'asta uniforme di Figura 2, potrebbe essere studiata mediante il modello discreto rappresentato in Figura 3 (asta di massa trascurabile, dotata di n masse concentrate, distribuite uniformemente lungo l'asta e di valore $m = M/L$, dove M rappresenta la massa totale dell'asta ed L la sua lunghezza²).

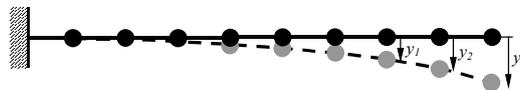


Figura 3: Schematizzazione di un sistema continuo mediante modello equivalente ad n GDL.

4 Classificazione delle vibrazioni

Le vibrazioni di un sistema si possono suddividere nelle seguenti categorie:

- *Vibrazioni libere*: avvengono in assenza di cause eccitatrici; se il sistema possiede un solo grado di libertà, la vibrazione libera ha una frequenza pari alla *frequenza propria* o *naturale* del sistema stesso; se il sistema

²L'uso di un modello semplificato è giustificato dal fatto che, nella fase preliminare di uno studio, è spesso sufficiente un'analisi approssimata, che fornisca alcune informazioni di base come i primi modi di vibrare, in genere corrispondenti alle configurazioni più semplici della deformata dell'organo vibrante.

possiede n gradi di libertà oppure è a parametri distribuiti, la generica vibrazione libera può essere ricavata come combinazione lineare dei modi principali di vibrare³.

- *Vibrazioni forzate*: avvengono in presenza di cause eccitatrici esterne dette *forzanti*, che agiscono sul sistema; caso tipico è quello di una forzante la cui dipendenza dal tempo è sinusoidale. Se la frequenza della forzante coincide con una delle frequenze naturali del sistema si verifica la cosiddetta condizione di *risonanza*, per effetto della quale le ampiezze di vibrazione aumentano considerevolmente. Molti cedimenti meccanici possono essere indotti da questo fenomeno.
- *Vibrazioni non smorzate*: si hanno quando è possibile trascurare i fenomeni di attrito e le conseguenti dissipazioni energetiche.
- *Vibrazioni smorzate*: in questo caso l'effetto degli attriti è rilevante e pertanto deve essere opportunamente considerato nelle equazioni di moto.
- *Vibrazioni in campo lineare*: sono vibrazioni descritte da equazioni o sistemi di equazioni differenziali *lineari*; in questo caso l'approccio analitico è semplice ed immediato, poiché le tecniche di soluzione sono note; si ricordi che, in campo lineare vale il principio di *sovrapposizione degli effetti*.
- *Vibrazioni in campo non lineare*: le equazioni differenziali sono non lineari e la loro soluzione in forma chiusa non è sempre possibile; spesso in questi casi è conveniente adottare tecniche di *linearizzazione* delle equazioni basate sull'utilizzo di opportuni sviluppi in serie; in tal modo si ricavano soluzioni valide solo per piccole oscillazioni nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile.
- *Vibrazioni deterministiche*: sono vibrazioni eccitate da forze il cui andamento temporale è definito da una legge nota.
- *Vibrazioni casuali (random)*: sono vibrazioni che avvengono in presenza di cause eccitatrici variabili nel tempo in modo non deterministico; ciò significa che il valore dell'eccitazione ad un generico istante non può essere previsto. In questi casi lo studio viene effettuato mediante metodi statistici. Esempi di eccitazioni *random* sono la velocità del vento, le asperità di un fondo stradale, il movimento del suolo durante un terremoto, ecc.

5 Molle

La molla può essere definita come un collegamento meccanico che produce un richiamo elastico; nei modelli matematici a parametri concentrati, si assume che le molle siano prive di massa e di smorzamento; essendo priva di massa, una molla non può quindi dare origine a fenomeni di vibrazione propri.

Il simbolo comunemente utilizzato per la rappresentazione schematica di una molla è riportato in Figura 4.



Figura 4: Rappresentazione schematica di una molla.

Una forza si genera nella molla quando esiste spostamento relativo fra le due estremità della molla stessa; se la molla ha *comportamento lineare* il legame forza-spostamento è esprimibile mediante le relazioni:

$$F = kx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{k}F = \alpha F \quad (2)$$

dove F è la *forza* elastica esercitata dalla molla, x è la *deformazione* subita (spostamento di un'estremità rispetto all'altra) e k la *rigidezza* o *costante elastica* della molla; il suo inverso, cioè $1/k$ è detto *cedevolezza* e viene indicato con α .

Il grafico della forza in funzione della deformazione viene definito *curva caratteristica* della molla; nel caso lineare la curva caratteristica è una retta passante per l'origine degli assi, in accordo con la legge di proporzionalità diretta espressa dalle (2); il coefficiente angolare di tale retta è pari alla rigidezza k della molla (vedi Figura 5).

³Il concetto di "modo principale di vibrare" verrà introdotto nel capitolo relativo ai sistemi con n gradi di libertà.

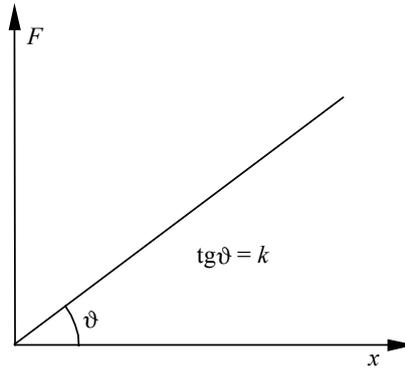


Figura 5: Curva caratteristica di una molla a comportamento lineare.

Il lavoro compiuto dalla forza F per deformare una molla di una quantità pari ad x viene immagazzinato dalla molla stessa sotto forma di energia potenziale elastica V ; per ricavare l'energia potenziale di una molla che subisce una deformazione pari ad x basterà quindi calcolare il lavoro della forza elastica mediante la relazione

$$V(x) = \int_0^x F(x) dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} F(x)x = \frac{1}{2} \frac{F(x)^2}{k} \quad (3)$$

Le molle reali, costruite con materiali metallici, hanno un comportamento lineare soltanto per valori della deformazione inferiori ad un certo limite, oltre il quale interviene lo snervamento del materiale (punto A in Figura 6); superando tale limite la rigidità della molla diminuisce notevolmente: ciò significa che, a piccoli incrementi di forza corrispondono notevoli incrementi nella deformazione.

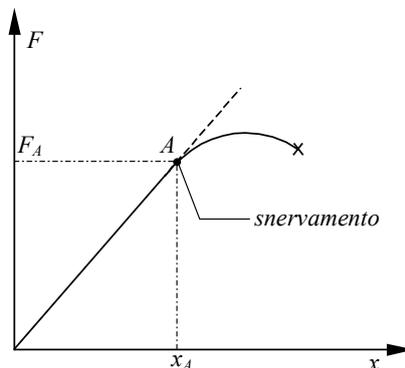


Figura 6: Curva caratteristica di una molla metallica in presenza di snervamento del materiale.

Talvolta le molle vengono realizzate con materiali a comportamento non lineare (plastica, gomma, ecc.); in tali situazioni il legame $F = F(x)$ è rappresentato graficamente da curve simili a quelle riportate in Figura 7⁴; se la funzione $F(x)$ presenta una derivata prima crescente, la molla si irrigidisce all'aumentare della deformazione (Figura 7a); viceversa, se la derivata prima è decrescente la rigidità della molla diminuisce all'aumentare della deformazione (Figura 7b); nel linguaggio anglosassone, l'aumento della rigidità si definisce *hardening* (letteralmente *indurimento*), mentre la diminuzione della rigidità viene indicata con il termine *softening* (letteralmente *ammorbidimento*); in entrambi i casi, la rigidità k della molla non risulta costante, ma dipende dall'entità della deformazione, ovvero $k = k(x)$.

Se le deformazioni della molla nell'intorno del suo punto di lavoro sono di modesta entità, è possibile approssimare un legame non lineare fra forza e deformazione mediante una relazione lineare equivalente; a tale scopo si utilizza uno sviluppo in serie di Taylor, arrestato al 1° ordine, nell'intorno del punto di funzionamento della molla; tale approccio, definito *linearizzazione locale*, è rappresentato graficamente in Figura 8.

⁴Per semplicità trascuriamo in questa sede fenomeni complessi, quali l'*isteresi* elastica del materiale.

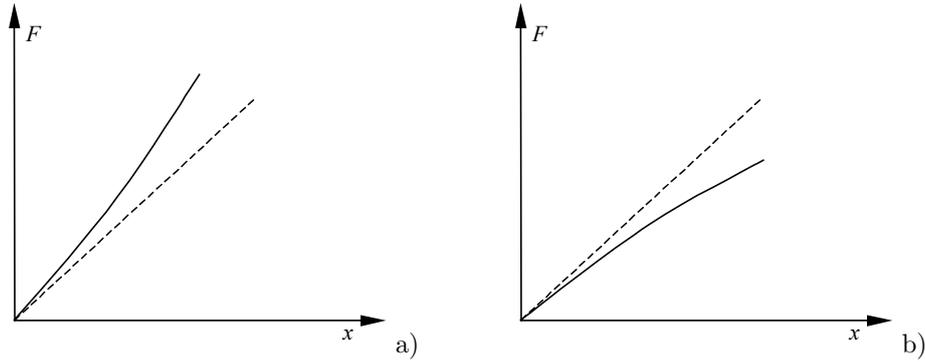


Figura 7: Curve caratteristiche di molle a comportamento non lineare: a) comportamento hardening; b) comportamento softening.

Per illustrare il processo di linearizzazione, supponiamo che il carico statico di equilibrio \bar{F} , agente sulla molla, produca una deformazione \bar{x} (punto P in Figura 8); se un incremento di forza ΔF viene aggiunto ad \bar{F} , la molla si deforma di una quantità aggiuntiva pari a Δx . La nuova forza della molla $\bar{F} + \Delta F = F(\bar{x} + \Delta x)$ può essere scritta come sviluppo in serie di Taylor nell'intorno della posizione di equilibrio statico \bar{x} .

$$\bar{F} + \Delta F = F(\bar{x} + \Delta x) = F(\bar{x}) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=\bar{x}} \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_{x=\bar{x}} (\Delta x)^2 + \dots \quad (4)$$

Per piccoli valori di Δx le derivate di ordine superiore al primo possono essere trascurate; si ha quindi:

$$\bar{F} + \Delta F \simeq F(\bar{x}) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=\bar{x}} \Delta x \quad (5)$$

Poiché $\bar{F} = F(\bar{x})$, si ha:

$$\Delta F \simeq \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=\bar{x}} \Delta x = k \Delta x \quad (6)$$

avendo definito la *rigidezza locale* k mediante la relazione

$$k = \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=\bar{x}} \quad (7)$$

In questo modo la curva caratteristica originaria viene approssimata mediante la retta tangente nel punto di lavoro della molla.

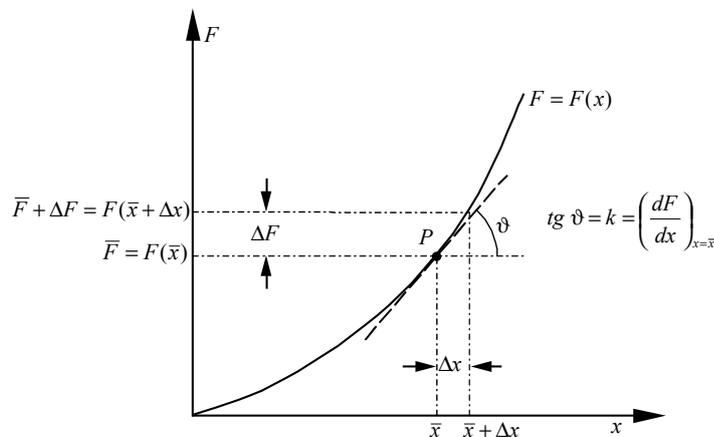


Figura 8: Linearizzazione della curva caratteristica di una molla nell'intorno del punto di lavoro P.

5.1 Calcolo delle costanti elastiche di semplici sistemi

a) Trave a mensola con carico all'estremità libera

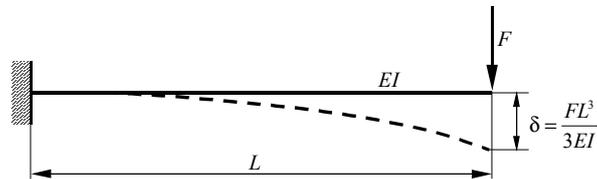


Figura 9: Trave a mensola con carico all'estremità libera.

Le grandezze caratteristiche del sistema sono:

- il modulo elastico di Young E del materiale costituente la trave;
- il momento d'inerzia I della sezione della trave rispetto all'asse neutro della flessione;
- la lunghezza L della trave.

Lo spostamento verticale δ all'estremità libera di una trave a mensola, caricata con una forza F in corrispondenza dell'estremità stessa, vale

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI} \quad (8)$$

La rigidezza equivalente risulta pertanto:

$$k_{eq} = \frac{F}{\delta} = \frac{3EI}{L^3} \quad (9)$$

b) Asta prismatica caricata assialmente

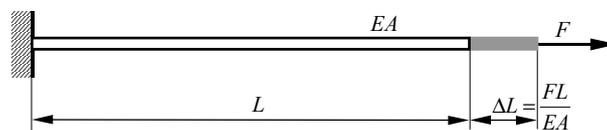


Figura 10: Asta prismatica caricata assialmente.

Le grandezze caratteristiche del sistema sono:

- il modulo elastico di Young E del materiale costituente l'asta;
- l'area A della sezione trasversale dell'asta;
- la lunghezza L dell'asta.

La deformazione assiale ΔL di un'asta prismatica caricata da una forza F vale

$$\Delta L = \frac{FL}{EA} \quad (10)$$

La rigidezza equivalente risulta pertanto:

$$k_{eq} = \frac{F}{\Delta L} = \frac{EA}{L} \quad (11)$$

c) Asta a sezione circolare sottoposta a momento torcente

Le grandezze caratteristiche del sistema sono:

- il modulo di elasticità tangenziale G del materiale costituente l'asta;
- il momento d'inerzia polare I_p della sezione trasversale dell'asta;
- la lunghezza L dell'asta.

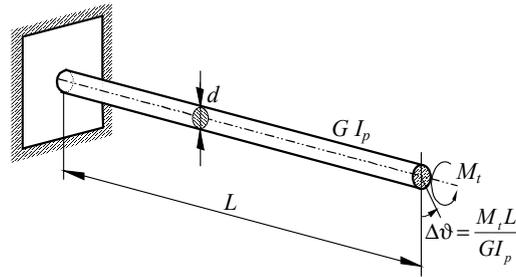


Figura 11: Asta a sezione circolare sottoposta a momento torcente.

La deformazione torsionale $\Delta\vartheta$ (rotazione relativa fra le sezioni di estremità) di un'asta a sezione circolare di diametro d , sottoposta ad un momento torcente M_t vale

$$\Delta\vartheta = \frac{M_t L}{G I_p} \quad (12)$$

dove $I_p = \pi d^4/32$ è il momento d'inerzia polare della sezione trasversale della trave. La rigidezza equivalente risulta pertanto

$$k_{teq} = \frac{M_t}{\Delta\vartheta} = \frac{G I_p}{L} = \frac{G \pi d^4}{32 L} \quad (13)$$

5.2 Combinazioni di molle

Le combinazioni di molle che si incontrano nei sistemi reali sono sempre riconducibili a schemi di tipo *serie* o *parallelo*; per ciascuna combinazione è possibile ricavare la rigidezza equivalente, come descritto nel seguito.

a) Molle in serie

Per definizione, due o più molle si dicono *in serie* quando sono sottoposte alla stessa forza.

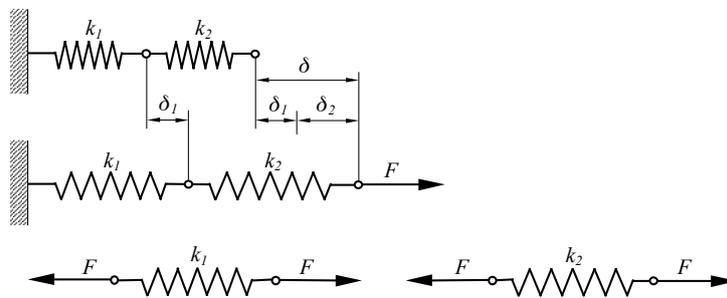


Figura 12: Combinazione di molle in serie.

Per ricavare l'espressione della rigidezza equivalente di molle collegate in serie, consideriamo il sistema rappresentato in Figura 12; quando si applica una forza F , le due molle subiscono deformazioni pari a δ_1 e δ_2 : la deformazione totale δ si ottiene sommando le deformazioni delle singole molle:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (14)$$

Poiché le molle sono sottoposte alla stessa forza F , possiamo scrivere:

$$F = k_1 \delta_1 = k_2 \delta_2 \quad (15)$$

La molla equivalente, se viene sottoposta alla forza F , subisce una deformazione pari a δ ; indicando con k_{eq} la sua costante elastica, possiamo allora scrivere:

$$F = k_{eq} \delta = k_{eq} (\delta_1 + \delta_2) = k_{eq} \left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \right) \quad (16)$$

ovvero

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (17)$$

In generale, per n molle disposte in serie aventi rigidzze k_1, k_2, \dots, k_n , vale la relazione:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad (18)$$

Possiamo quindi affermare che, nel caso di molle in serie, la cedevolezza della molla equivalente $\alpha_{eq} = 1/k_{eq}$ è pari alla somma delle cedevolezza $\alpha_i = 1/k_i$ delle singole molle.

b) Molle in parallelo

Per definizione, due o più molle si dicono *in parallelo* quando subiscono la stessa deformazione.

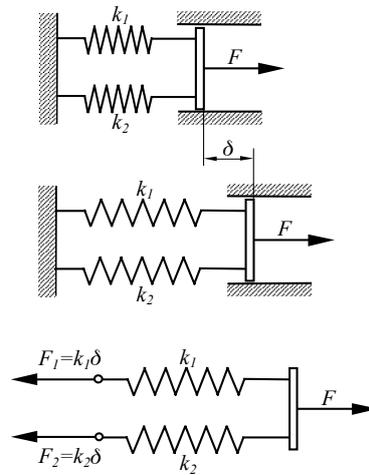


Figura 13: Combinazione di molle in parallelo.

Per ricavare l'espressione della rigidzza equivalente di molle collegate in parallelo, consideriamo il sistema rappresentato in Figura 13; quando le molle subiscono una deformazione pari a δ si generano due forze elastiche F_1 ed F_2 che equilibrano il carico applicato F :

$$F = F_1 + F_2 \quad (19)$$

Poiché le molle subiscono la stessa deformazione δ , possiamo scrivere:

$$\delta = \frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2} \quad (20)$$

La molla equivalente subisce una deformazione pari a δ se viene sottoposta alla forza F ; detta k_{eq} la sua costante elastica, si ha:

$$F = F_1 + F_2 = k_{eq}\delta = k_1\delta + k_2\delta \quad (21)$$

ovvero

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \quad (22)$$

In generale, per n molle disposte in parallelo aventi rigidzze k_1, k_2, \dots, k_n , vale la relazione:

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i \quad (23)$$

Possiamo quindi affermare che, nel caso di molle in parallelo, la rigidzza k_{eq} della molla equivalente è pari alla somma delle rigidzze k_i delle singole molle.

6 Smorzatori

Nei sistemi reali l'energia meccanica viene gradualmente convertita in calore o suono per effetto della dissipazione energetica; a causa di questa riduzione di energia, la *risposta* del sistema (ad esempio l'ampiezza di oscillazione) decresce gradualmente nel tempo; il fenomeno mediante il quale l'energia viene progressivamente dissipata prende il nome di *smorzamento*.

Sebbene la quantità di energia convertita in calore o suono sia relativamente piccola, la considerazione dello smorzamento diviene importante, qualora si vogliano prevedere accuratamente i fenomeni vibratorii.

In un sistema a parametri concentrati l'elemento smorzante (vedi Figura 14) si considera privo di massa e di elasticità e la forza da esso generata si manifesta soltanto se vi è *velocità* relativa fra le due estremità del dispositivo (in modo analogo, la forza elastica ha origine solo in presenza di spostamento relativo fra le estremità di una molla).

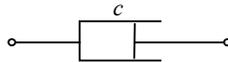


Figura 14: Rappresentazione schematica di uno smorzatore.

Possiamo pertanto affermare che le forze smorzanti sono presenti solo in condizioni dinamiche, a differenza delle forze elastiche, che possono manifestarsi anche in condizioni statiche: per un sistema in quiete, quindi, gli smorzatori non danno alcun contributo in termini di forza.

Lo smorzamento viene classificato in categorie differenti, a seconda del fenomeno fisico che lo produce; i principali tipi di smorzamento adottati per lo studio dei sistemi vibranti sono descritti nel seguito.

a) Smorzamento viscoso

Come è noto, quando un sistema meccanico vibra in un mezzo fluido, la resistenza opposta dal fluido all'elemento mobile genera una dissipazione energetica; la quantità di energia dissipata può dipendere da molti fattori, quali le dimensioni e la forma del corpo vibrante, la viscosità del fluido, la frequenza di vibrazione e la velocità del corpo vibrante. In presenza di smorzamento viscoso la forza smorzante F_{visc} risulta proporzionale alla velocità v del corpo sottoposto a vibrazione (vi è quindi una dipendenza lineare tra la forza smorzante e la velocità); indicando con c la costante di proporzionalità si ha:

$$\vec{F}_{visc} = -c\vec{v} \quad (24)$$

Pertanto, se si assume l'ipotesi di smorzamento viscoso, le equazioni di moto si mantengono lineari ed è quindi possibile ricavare la loro soluzione in forma analitica. Per questo motivo tale modello di smorzamento viene frequentemente utilizzato per l'analisi delle vibrazioni di sistemi meccanici. Esempi tipici di smorzamento viscoso sono generati da:

- a) film fluido tra superfici in moto relativo;
- b) flusso di fluido attorno ad un pistone in un cilindro;
- c) flusso di fluido attraverso un orifizio;
- d) film fluido in un cuscinetto a strisciamento.

La costante di smorzamento dipende dalla viscosità del fluido e da fattori geometrici; a titolo di esempio ricaviamo il valore di tale costante per il caso a) (film fluido fra superfici in moto relativo).

Con riferimento alla situazione rappresentata in Figura 15, lo sforzo tangenziale nello strato di fluido posto a distanza y dalla lastra fissa è dato da:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{v}{h} \quad (25)$$

dove $du/dy = v/h$ rappresenta il gradiente di velocità e μ la viscosità del fluido; la relazione (25), nota come *legge di Petrov*, permette di calcolare facilmente la forza resistente F_{visc} che si sviluppa sulla superficie inferiore (di area A) della lastra mobile:

$$F_{visc} = \tau A = \mu \frac{v}{h} A \quad (26)$$

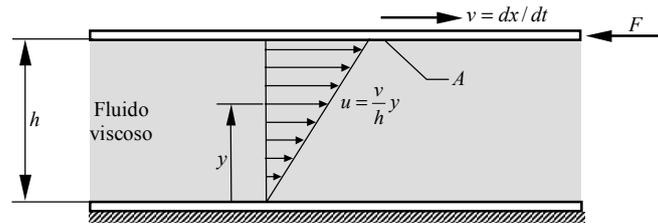


Figura 15: Film fluido fra superfici in moto relativo.

Dalle relazioni (24) (considerata in modulo) e (26) si ricava immediatamente l'espressione della costante di smorzamento in funzione della viscosità e dei parametri geometrici:

$$c = \frac{\mu A}{h} \quad (27)$$

Se lo smorzatore presenta una curva caratteristica $F_{visc}(v)$ non lineare, può essere conveniente utilizzare una tecnica di linearizzazione nell'intorno della velocità operativa \vec{v} (tale procedura è già stata adottata nel caso di molla a comportamento non lineare); la linearizzazione fornisce una costante di smorzamento equivalente pari a:

$$c = \left(\frac{dF_{visc}}{dv} \right)_{v=\vec{v}} \quad (28)$$

Inoltre, se gli smorzatori viscosi appaiono in combinazioni serie o parallelo, è possibile sostituirli con uno smorzatore equivalente, impiegando una procedura di calcolo analoga a quella adottata per le molle.

b) Smorzamento interno o strutturale

Quando i materiali vengono sottoposti a deformazione, l'energia viene assorbita e dissipata dal materiale stesso; tale effetto è dovuto all'attrito tra le fibre interne del materiale che scorrono o scivolano le une rispetto alle altre quando la deformazione ha luogo. Quando un corpo dotato di smorzamento strutturale è soggetto a vibrazione, il legame tra lo sforzo σ e la deformazione ϵ mostra un ciclo di isteresi, come indicato in Figura 16; l'area delimitata da questo ciclo rappresenta l'energia perduta (per unità di volume) in un ciclo a causa dello smorzamento interno.

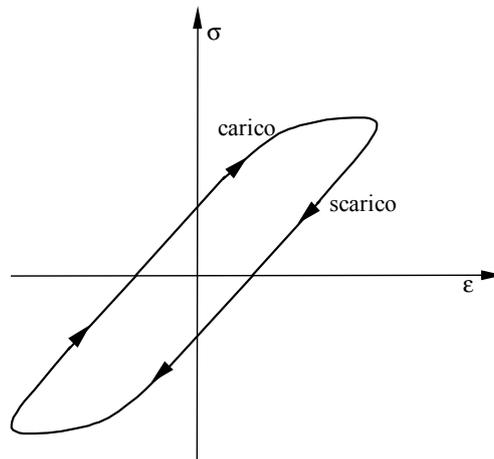


Figura 16: Ciclo di isteresi per materiali elastici.

c) Smorzamento dovuto all'attrito coulombiano

In questo caso la forza smorzante \vec{F}_a è costante in modulo, ma opposta alla velocità \vec{v} del corpo vibrante; tale forza si genera per effetto dell'attrito radente tra superfici che strisciano in assenza di lubrificazione; indicando con f_d il coefficiente di attrito dinamico fra le due superfici in moto relativo, si ha

$$\vec{F}_a = -f_d N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (29)$$

dove N indica il modulo della forza agente in direzione normale alle superfici stesse.

7 Il moto armonico

Un movimento che si ripete in modo identico dopo intervalli di tempo T si definisce *moto periodico*; da un punto di vista matematico, un moto periodico è definito dalla relazione

$$x(t) = x(t + T) \quad (30)$$

Il tipo più semplice di moto periodico è il *moto armonico*; il movimento impresso al punto P mediante il manovellismo a croce (giogo scozzese) rappresentato in Figura 17 è un esempio di moto armonico.

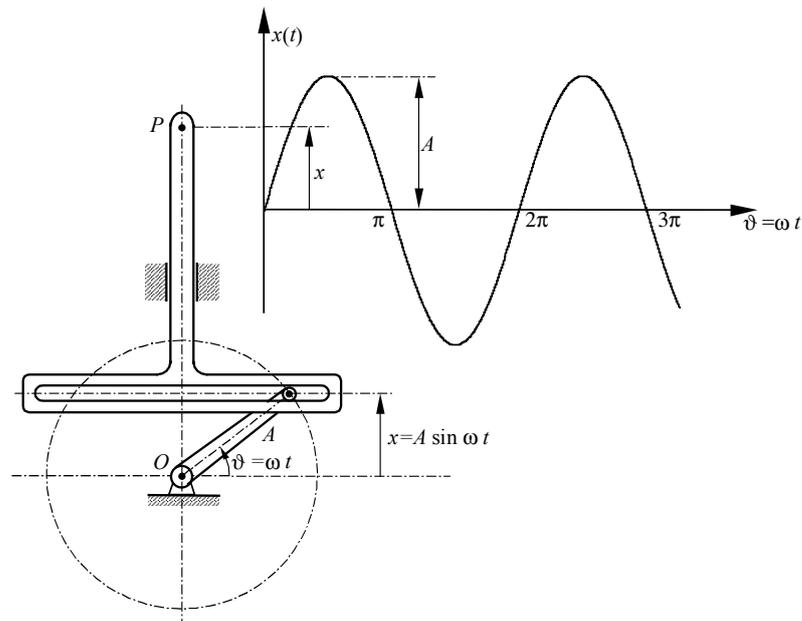


Figura 17: Manovellismo a croce utilizzato per generare un moto armonico.

In questo semplice meccanismo una manovella di raggio A , ruotando a velocità angolare costante ω attorno al punto O , genera un spostamento verticale x del punto P pari a⁵

$$x = A \sin \omega t \quad (31)$$

Derivando rispetto al tempo la (31) si ricava l'espressione della velocità per il moto armonico:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t \quad (32)$$

Mediante un'ulteriore derivazione si ottiene l'espressione dell'accelerazione:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x \quad (33)$$

Possiamo quindi affermare che, in un moto armonico, l'accelerazione \ddot{x} è direttamente proporzionale allo spostamento x ed opposta ad esso (la costante di proporzionalità è ω^2).

Dalla (33) si deduce immediatamente che il moto armonico è soluzione dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (34)$$

che, come vedremo, descrive le vibrazioni libere di sistemi ad un grado di libertà.

⁵Si osservi che il moto armonico può essere descritto anche da una funzione del tipo $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ dove α rappresenta una fase arbitraria; in particolare se $\alpha = \pi/2$ si ha $x = A \cos \omega t$.

7.1 Rappresentazione vettoriale di un moto armonico

Il moto armonico può essere facilmente rappresentato mediante un vettore rotante o *fasore* \overrightarrow{OP} , di modulo A , che ruota a velocità angolare ω (vedi Figura 18).

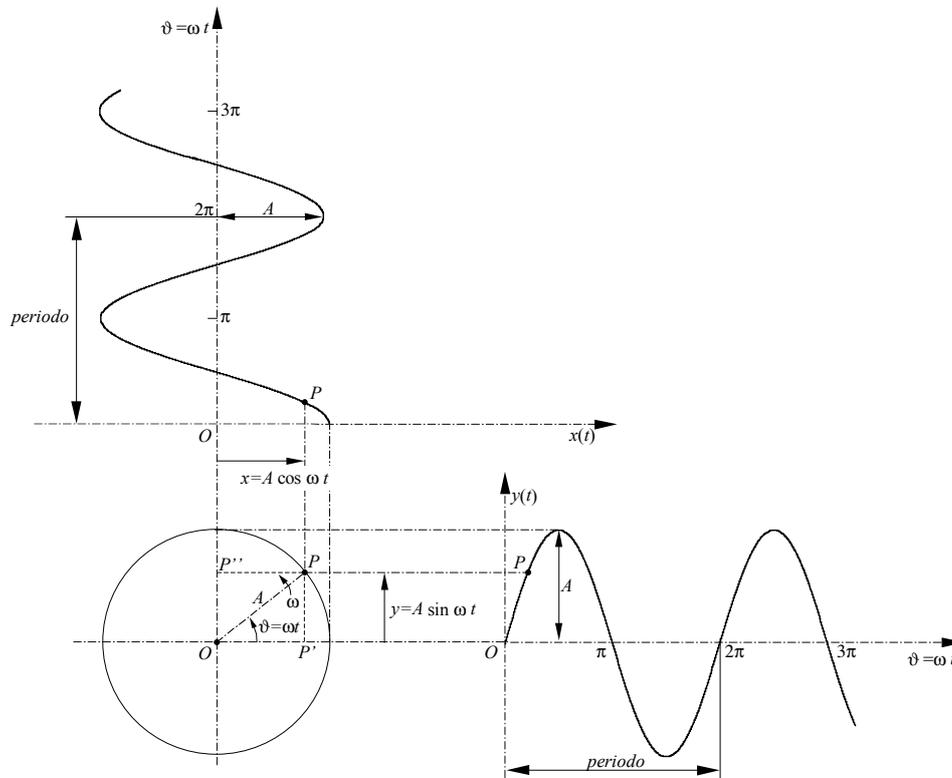


Figura 18: Rappresentazione del moto armonico mediante l'impiego di un vettore rotante.

Infatti le componenti del vettore lungo gli assi cartesiani sono date da:

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega t \\ y &= A \sin \omega t \end{aligned} \quad (35)$$

Sulla base delle relazioni (35) possiamo affermare che il moto armonico è il moto dei punti P' e P'' , proiezioni su due diametri ortogonali del punto P che si muove lungo la circonferenza con velocità costante.

7.2 Rappresentazione di un moto armonico mediante numeri complessi

Come si è visto, il metodo di rappresentazione del moto armonico mediante fasori richiede la definizione delle componenti del vettore rotante secondo due direzioni ortogonali; se il vettore viene rappresentato mediante un numero complesso (che, come è noto, risulta costituito da una coppia ordinata di numeri reali) si ha l'indubbio vantaggio di rappresentare entrambe le componenti utilizzando un'unica entità.

Nel piano di Gauss (vedi Figura 19) il vettore \overrightarrow{OP} viene rappresentato mediante il numero complesso

$$\bar{z} = x + iy \quad (36)$$

dove x ed y indicano rispettivamente la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria, mentre i rappresenta l'unità immaginaria (il trattino sopra il simbolo z è la notazione usata per indicare una quantità complessa); la relazione (36) definisce la *forma algebrica* (o *cartesiana*) di un numero complesso.

Se indichiamo con A il modulo del numero complesso e con φ il suo argomento (angolo formato dal vettore con il semiasse reale positivo) si ha:

$$\bar{z} = A \cos \varphi + iA \sin \varphi \quad (37)$$

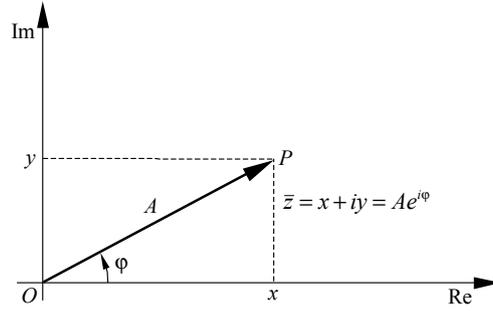


Figura 19: Rappresentazione complessa di un vettore.

dove

$$A = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \arg(\bar{z}) = \arctan \frac{y}{x} \quad (6) \quad (38)$$

La (37) è la *forma trigonometrica* di un numero complesso. Utilizzando la formula di Eulero

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (39)$$

il numero complesso \bar{z} può essere riscritto nella *forma esponenziale* (o *polare*):

$$\bar{z} = A e^{i\varphi} \quad (40)$$

Sulla base di quanto esposto in precedenza, possiamo affermare che esiste una perfetta corrispondenza tra funzione armonica, vettore rotante e numero complesso; se il vettore ruota con velocità angolare ω possiamo scrivere:

$$\bar{z} = x + iy = A(\cos \omega t + i \sin \omega t) = A e^{i\omega t} \quad (41)$$

Pertanto, alle funzioni armoniche *seno* e *coseno* è possibile associare rispettivamente la parte immaginaria e la parte reale del numero complesso:

$$\begin{aligned} y &= A \sin \omega t = \text{Im}(A e^{i\omega t}) \\ x &= A \cos \omega t = \text{Re}(A e^{i\omega t}) \end{aligned} \quad (42)$$

Consideriamo ora il numero complesso $\bar{X} = A e^{i\omega t}$ e supponiamo che esso rappresenti uno spostamento armonico; per ricavare i vettori velocità $\dot{\bar{X}}$ ed accelerazione $\ddot{\bar{X}}$ calcoliamo le derivate prima e seconda rispetto al tempo, tenendo presente che le note regole di derivazione valgono anche nel campo complesso:

$$\dot{\bar{X}} = \frac{d\bar{X}}{dt} = i\omega A e^{i\omega t} \quad (43)$$

$$\ddot{\bar{X}} = \frac{d^2\bar{X}}{dt^2} = -\omega^2 A e^{i\omega t} = -\omega^2 \bar{X} \quad (44)$$

I vettori spostamento, velocità e accelerazione presentano fra di loro sfasamenti di $\pi/2$ radianti; in particolare, il vettore velocità è in anticipo di $\pi/2$ radianti rispetto al vettore spostamento, mentre il vettore accelerazione è in anticipo di $\pi/2$ radianti rispetto al vettore velocità (e quindi risulta in anticipo di π radianti rispetto al vettore spostamento).

Per verificare questa affermazione basta ricordare che, per la formula di Eulero (39), si ha:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad e^{i\pi} = -1 \quad (45)$$

e quindi le relazioni (43) e (44) possono essere riscritte nella forma:

$$\dot{\bar{X}} = i\omega A e^{i\omega t} = \omega A e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \quad (46)$$

$$\ddot{\bar{X}} = -\omega^2 A e^{i\omega t} = \omega^2 A e^{i(\omega t + \pi)} \quad (47)$$

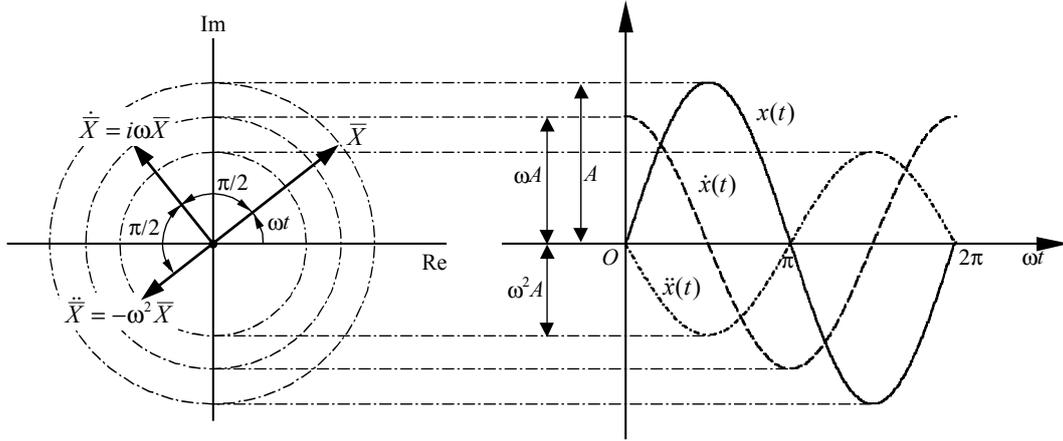


Figura 20: Spostamento, velocità ed accelerazione in un moto armonico (rappresentazione vettoriale e corrispondente rappresentazione mediante funzioni armoniche).

Le relazioni di fase tra spostamento, velocità ed accelerazione sono chiaramente rappresentate in Figura 20⁷.

Le funzioni armoniche si possono sommare vettorialmente, come illustrato in Figura 21; siano $x_1 = \text{Im}(\bar{X}_1) = A_1 \sin \omega t$ e $x_2 = \text{Im}(\bar{X}_2) = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$ due moti armonici sfasati di un certo angolo φ ; il modulo A del vettore risultante $\bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 = A e^{i(\omega t + \alpha)}$ si ricava facilmente applicando il teorema del coseno al triangolo OP_1P :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - \varphi)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi} \quad (48)$$

L'angolo α formato dal vettore risultante con il vettore \bar{X}_1 è dato da

$$\alpha = \arctan \frac{A_2 \sin \varphi}{A_1 + A_2 \cos \varphi} \quad (49)$$

Poiché le due funzioni sommate erano state espresse come parte immaginaria dei vettori \bar{X}_1 e \bar{X}_2 , il moto armonico risultante sarà⁸:

$$x = \text{Im}(\bar{X}) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (50)$$

8 Definizioni e terminologia

Nel seguito vengono date le definizioni di alcuni termini che si incontrano frequentemente nello studio delle vibrazioni.

- *Ciclo*. Il *ciclo* rappresenta un'oscillazione completa (non necessariamente armonica) del corpo vibrante: pertanto all'inizio ed alla fine di un ciclo le grandezze cinematiche che caratterizzano il movimento del

⁶Per il calcolo dell'argomento è preferibile utilizzare la funzione $\text{atan2}(y, x)$, che fornisce il valore dell'arco la cui tangente è y/x , calcolato tenendo conto del segno di x e di y ; contrariamente alla funzione *arcotangente* standard (che fornisce un valore compreso fra $-\pi/2$ e $\pi/2$), la funzione atan2 è definita sui quattro quadranti del piano xy e pertanto fornisce un valore compreso fra $-\pi$ e π (oppure fra 0 e 2π).

⁷Se, per rappresentare lo spostamento armonico, avessimo utilizzato le funzioni trigonometriche *seno* o *coseno* in luogo dei numeri complessi, saremmo ovviamente pervenuti allo stesso risultato; infatti, utilizzando la funzione *seno* si ha:

$$\begin{aligned} y &= A \sin \omega t \\ \dot{y} &= \omega A \cos \omega t = \omega A \sin(\omega t + \pi/2) \\ \ddot{y} &= -\omega^2 A \sin \omega t = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi) \end{aligned}$$

utilizzando invece la funzione *coseno* si ottiene:

$$\begin{aligned} y &= A \cos \omega t \\ \dot{y} &= -\omega A \sin \omega t = \omega A \cos(\omega t + \pi/2) \\ \ddot{y} &= -\omega^2 A \cos \omega t = \omega^2 A \cos(\omega t + \pi) \end{aligned}$$

⁸In modo del tutto analogo, se $x_1 = \text{Re}(\bar{X}_1) = A_1 \cos \omega t$ e $x_2 = \text{Re}(\bar{X}_2) = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$ avremmo ottenuto: $x = \text{Re}(\bar{X}) = A \cos(\omega t + \alpha)$

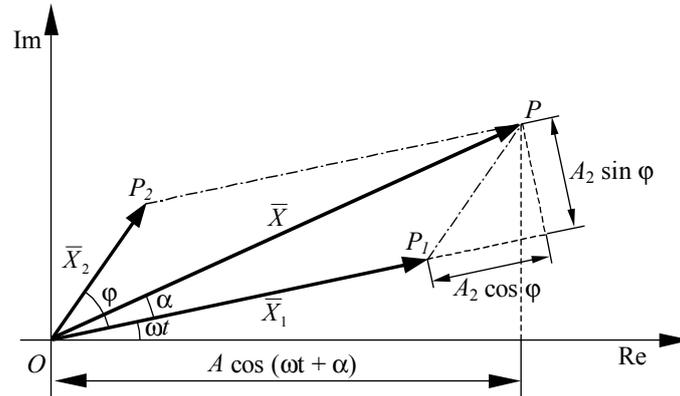


Figura 21: Somma vettoriale di funzioni armoniche.

corpo assumeranno lo stesso valore; per definizione, ogni ciclo si ripete uguale a se stesso ad intervalli di tempo regolari.

- *Ampiezza.* Il massimo spostamento del corpo vibrante dalla sua posizione di equilibrio è chiamato *ampiezza* di oscillazione.
- *Periodo.* Il tempo impiegato per compiere un ciclo è chiamato *periodo* e viene solitamente indicato con i simboli T o τ ; con riferimento alla rappresentazione del moto armonico mediante fasori, il periodo corrisponde al tempo impiegato dal vettore rotante per compiere una rotazione completa (2π radianti). Poiché ω è la velocità angolare (costante) del fasore, vale la seguente relazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (51)$$

Nel Sistema Internazionale il periodo viene espresso in secondi.

- *Frequenza.* Il numero di cicli compiuti nell'unità di tempo si definisce *frequenza* di oscillazione e viene comunemente indicato con il simbolo f (talvolta si usa anche la lettera greca ν); dalla definizione suddetta si deduce che la frequenza è l'inverso del periodo e pertanto:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (52)$$

Nel Sistema Internazionale la frequenza viene espressa in cicli/s o hertz [Hz]. La grandezza ω che, come si è detto, rappresenta la velocità angolare del vettore rotante, viene chiamata *pulsazione*, *frequenza circolare* o *frequenza angolare*⁹; nel Sistema Internazionale la pulsazione si misura in rad/s.

- *Angolo di fase.* Consideriamo due moti armonici definiti dalle relazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin \omega t \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (53)$$

I due movimenti sono sincroni (infatti la pulsazione ω è la stessa), hanno ampiezze diverse, ma non raggiungono la loro massima ampiezza nello stesso istante di tempo. La rappresentazione grafica dei due moti, riportata in Figura 22, mostra chiaramente che il vettore $\overrightarrow{OP_2}$ precede il vettore $\overrightarrow{OP_1}$ di un angolo φ detto *angolo di fase*; ciò significa che il massimo di x_2 si verifica φ radianti prima del massimo di x_1 (l'intervallo di tempo che intercorre fra i due massimi è pari a φ/ω secondi).

Si osservi che, in luogo dei due punti di massimo, qualsiasi coppia di punti omologhi sulle due sinusoidi può essere utilizzata per ricavare l'angolo di fase. Quando l'angolo di fase è *positivo* (è il caso illustrato in Figura 22) $\overrightarrow{OP_2}$ è *in anticipo* rispetto a $\overrightarrow{OP_1}$, viceversa, quando l'angolo di fase è *negativo* $\overrightarrow{OP_2}$ è *in ritardo* rispetto a $\overrightarrow{OP_1}$.

⁹Spesso il termine "frequenza" viene usato indifferentemente per indicare sia f sia ω .

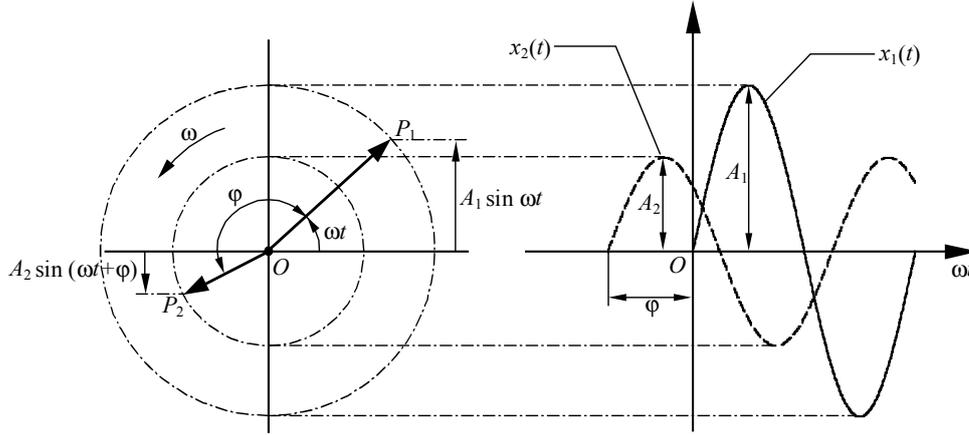


Figura 22: Differenza di fase tra due moti armonici.

- **Valore medio, valore quadratico medio, valore efficace.** Il *valore medio* (mean value o average value) \bar{x} di una funzione periodica $x(t)$ si calcola, come è noto, integrando la funzione sull'intervallo di un periodo e dividendo il risultato dell'integrazione per il periodo stesso; pertanto, se indichiamo con T il periodo, si ha:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (54)$$

Per esempio, il valore medio sull'intero periodo di una senoide è pari a zero, mentre il valore medio su un semiperiodo è pari a:

$$\bar{x} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} A \sin \omega t dt = \frac{\omega A}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t dt = \frac{2A}{\pi} = 0.637A \quad (55)$$

Poiché l'energia e la potenza media associate alla vibrazione dipendono dal quadrato dello spostamento, spesso l'entità di una vibrazione viene misurata utilizzando il *valore quadratico medio* (mean square value) $\overline{x^2}$, definito come il valore medio sul periodo della funzione $x^2(t)$:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (56)$$

Per una senoide si ha:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin \omega t)^2 dt = \frac{\omega A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \frac{A^2}{2} \quad (57)$$

Il *valore efficace* (root mean square value o rms value) è definito come la radice quadrata del valore quadratico medio; si ha quindi:

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (58)$$

Dalla (57) si deduce immediatamente che il valore efficace per una senoide è:

$$x_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0.707A \quad (59)$$

- **Ottava.** Si definisce *ottava* un determinato intervallo (banda) di frequenze in cui il valore massimo è pari al doppio del valore minimo; per esempio, un intervallo di frequenze comprese fra 100 e 200 Hz corrisponde ad 1 ottava, mentre un intervallo di frequenze da 40 a 160 Hz corrisponde a 2 ottave.
- **Decibel.** Le varie quantità che si incontrano nel campo delle vibrazioni e dell'acustica (come per esempio velocità, accelerazione, pressione e potenza) vengono spesso espresse in *decibel*. Un decibel (dB) è definito tramite il rapporto fra due potenze:

$$dB = 10 \log \left(\frac{P}{P_0} \right) \quad (60)$$

dove P_0 è un valore di riferimento; poiché la potenza media è proporzionale al quadrato dell'ampiezza di vibrazione X , il decibel può anche essere espresso come segue:

$$dB = 10 \log \left(\frac{X}{X_0} \right)^2 = 20 \log \left(\frac{X}{X_0} \right) \quad (61)$$

dove X_0 indica un opportuno valore di riferimento.