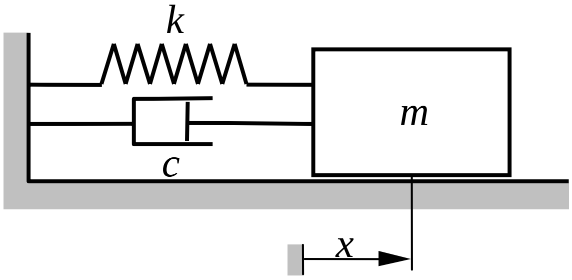
Vibrazioni libere di sistemi ad un grado di libertà



Equazione differenziale di moto:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

Parametri caratteristici del sistema vibrante:

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	**Pulsazione propria**
$c_c = 2m\omega = 2\sqrt{km}$	**Smorzamento critico**
$\xi = \dfrac{c}{c_c}$	**Fattore di smorzamento adimensionale**
$\omega_s = \omega\sqrt{1-\xi^2}$	**Pulsazione propria smorzata**

Soluzione dell'equazione di moto:

a) Caso sottosmorzato ($\xi < 1$): moto oscillatorio.
La soluzione può essere scritta nelle tre forme equivalenti sotto riportate:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left(C_1 e^{i\omega_s t} + C_2 e^{-i\omega_s t}\right) \qquad \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 - i\dfrac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_s}\right) \\ C_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + i\dfrac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_s}\right) \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A\cos\omega_s t + B\sin\omega_s t\right) \qquad \begin{cases} A = x_0 \\ B = \dfrac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_s} \end{cases}$$

$$x(t) = Ce^{-\xi\omega t}\sin\left(\omega_s t + \alpha\right) \qquad \begin{cases} C = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_s}\right)^2} \\ \tan\alpha = \dfrac{\omega_s x_0}{\xi\omega x_0 + v_0} \end{cases}$$

b) Caso con smorzamento critico ($\xi = 1$): moto aperiodico.

$$x(t) = e^{-\omega t}(C_1 + C_2 t) \qquad \begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = \omega x_0 + v_0 \end{cases}$$

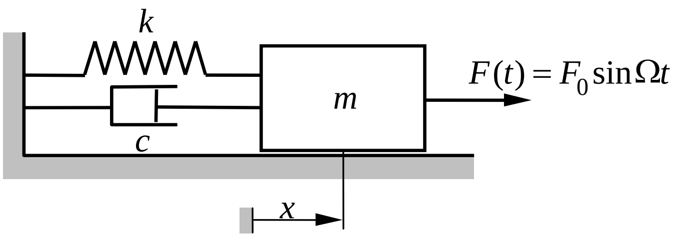
c) Caso sovrasmorzato ($\xi > 1$): moto aperiodico.

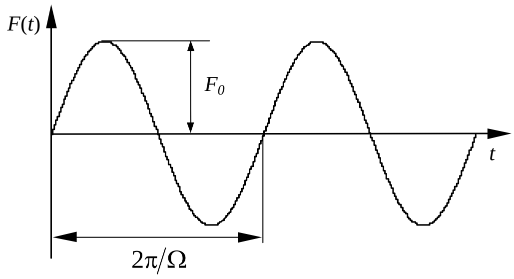
$$\lambda_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\,\omega$$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \begin{cases} C_1 = \dfrac{-v_0 + x_0\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ C_2 = \dfrac{v_0 - x_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{cases}$$

Vibrazioni di sistemi ad un grado di libertà con forzante armonica

Caso n.1: Forzante applicata alla massa





Equazione differenziale di moto:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \Omega t$$

Parametri caratteristici del sistema vibrante:

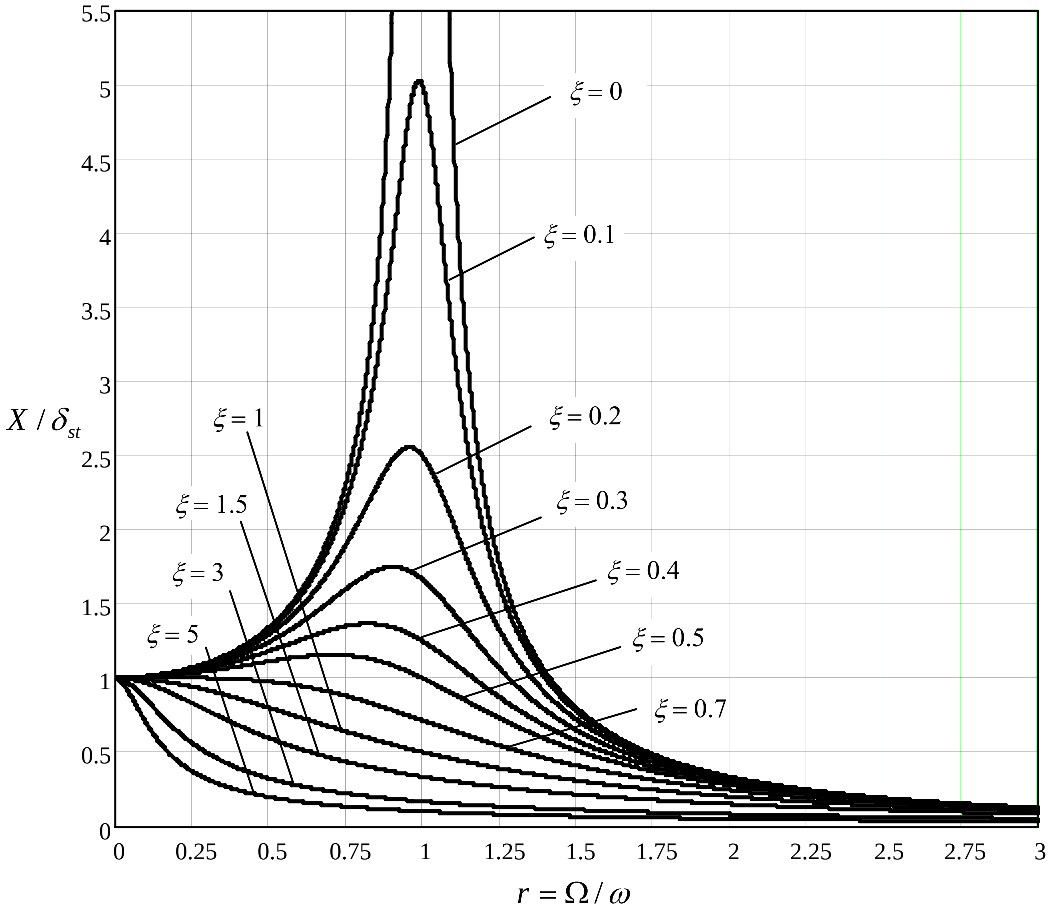
$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	**Pulsazione propria**
$c_c = 2m\omega = 2\sqrt{km}$	**Smorzamento critico**
$\xi = \dfrac{c}{c_c}$	**Fattore di smorzamento adimensionale**
$\delta_{st} = \dfrac{F_0}{k}$	**Deformazione statica**
$r = \dfrac{\Omega}{\omega}$	**Rapporto di frequenza**

Soluzione a regime:

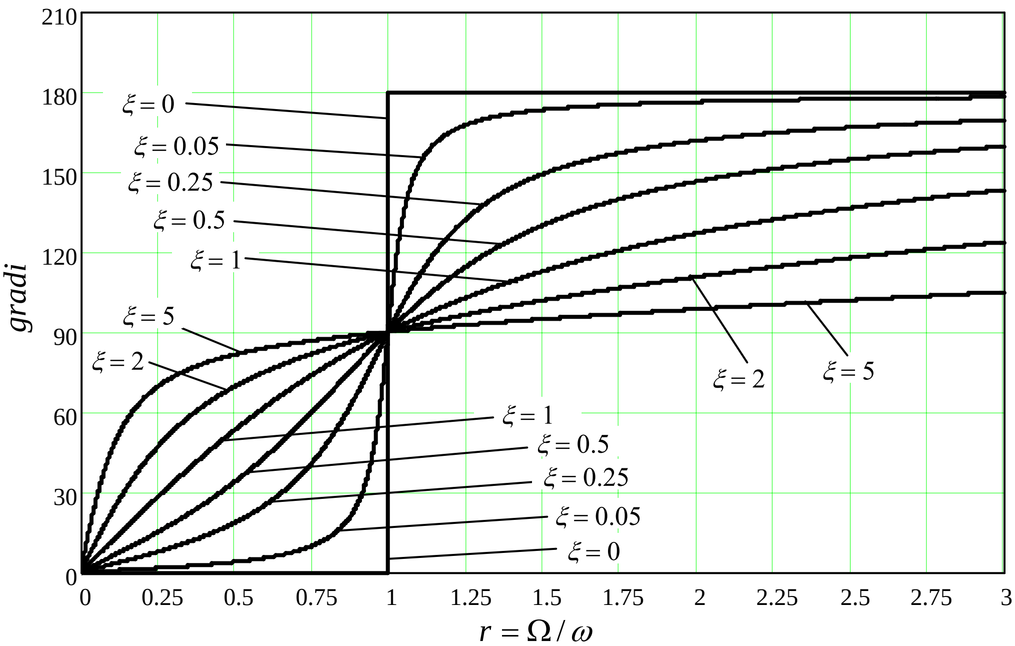
$$x(t) = X \sin(\Omega t - \varphi)$$

dove:

$$\begin{cases} X = \dfrac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \\ \\ \tan\varphi = \dfrac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{X}{\delta_{st}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \\ \\ \tan\varphi = \dfrac{2\xi r}{1 - r^2} \end{cases}$$



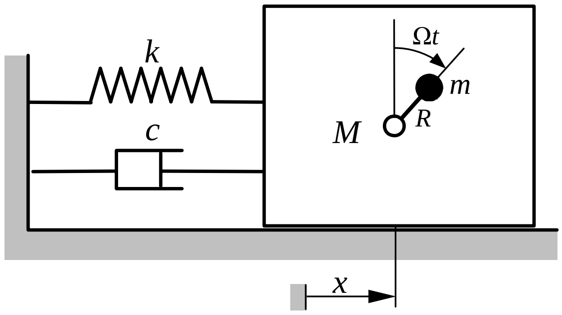
X / δ_{st}
$r = \Omega / \omega$
$\xi = 0$
$\xi = 0.1$
$\xi = 0.2$
$\xi = 0.3$
$\xi = 0.4$
$\xi = 0.5$
$\xi = 0.7$
$\xi = 1$
$\xi = 1.5$
$\xi = 3$
$\xi = 5$



gradi
$r = \Omega / \omega$
$\xi = 0$
$\xi = 0.05$
$\xi = 0.25$
$\xi = 0.5$
$\xi = 1$
$\xi = 2$
$\xi = 5$

Vibrazioni di sistemi ad un grado di libertà con forzante armonica

Caso n.2: Forzante inerziale



Equazione differenziale di moto:

$$M_T\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\Omega^2 R \sin \Omega t$$

in cui $M_T = M + m$.

Parametri caratteristici del sistema vibrante:

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M_T}}$ **Pulsazione propria**

$c_c = 2M_T\omega = 2\sqrt{kM_T}$ **Smorzamento critico**

$\xi = \dfrac{c}{c_c}$ **Fattore di smorzamento adimensionale**

$X_0 = \left(\dfrac{m}{M_T}\right) R$

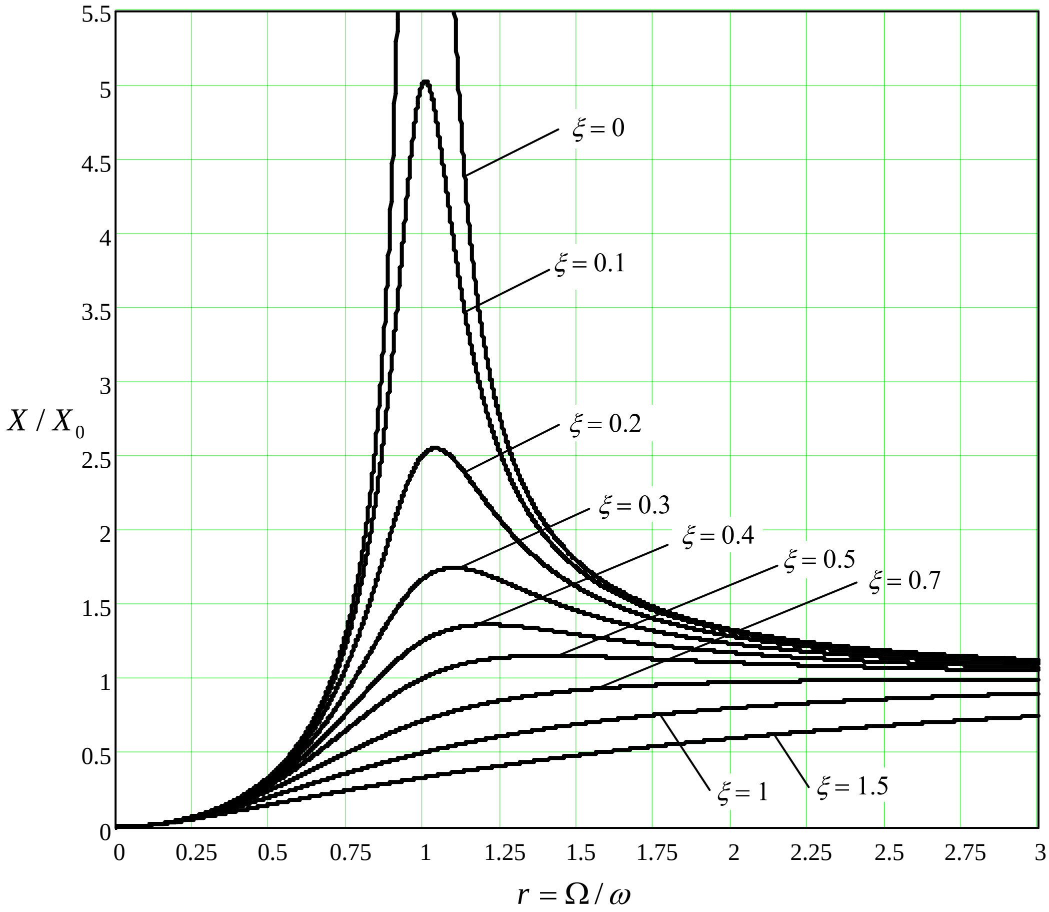
$r = \dfrac{\Omega}{\omega}$ **Rapporto di frequenza**

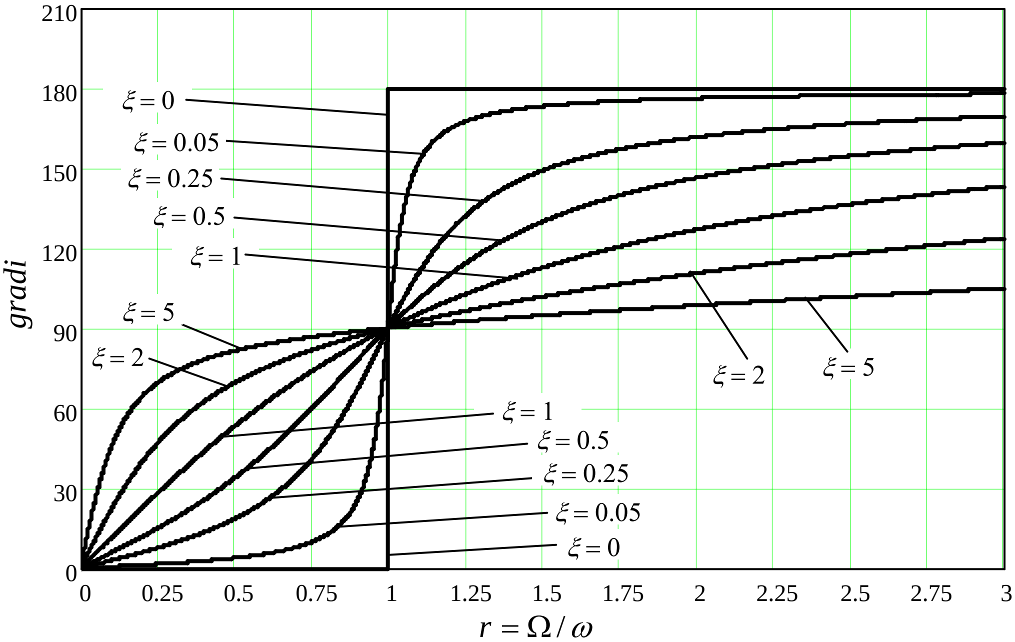
Soluzione a regime:

$$x(t) = X \sin(\Omega t - \varphi)$$

dove:

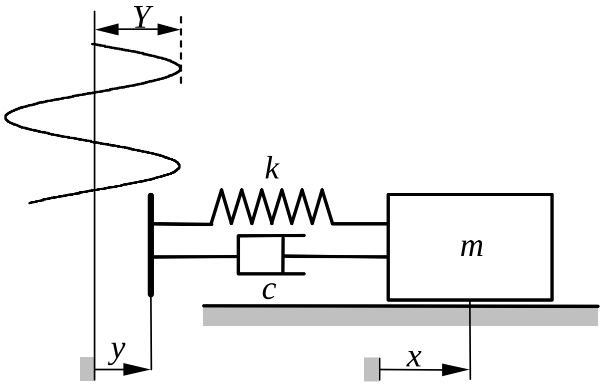
$$\begin{cases} X = \dfrac{m\Omega^2 R}{\sqrt{(k - M_T\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \\ \\ \tan\varphi = \dfrac{c\Omega}{k - M_T\Omega^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{X}{X_0} = \dfrac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \\ \\ \tan\varphi = \dfrac{2\xi r}{1 - r^2} \end{cases}$$


X / X_0
$r = \Omega / \omega$
$\xi = 0$
$\xi = 0.1$
$\xi = 0.2$
$\xi = 0.3$
$\xi = 0.4$
$\xi = 0.5$
$\xi = 0.7$
$\xi = 1$
$\xi = 1.5$


gradi
$r = \Omega / \omega$
$\xi = 0$
$\xi = 0.05$
$\xi = 0.25$
$\xi = 0.5$
$\xi = 1$
$\xi = 5$
$\xi = 2$
$\xi = 1$
$\xi = 0.5$
$\xi = 0.25$
$\xi = 0.05$
$\xi = 0$
$\xi = 2$
$\xi = 5$

Vibrazioni di sistemi ad un grado di libertà con forzante armonica

Caso n.3: Spostamento del vincolo



Equazione differenziale di moto:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$$

in cui $y(t) = Y \sin \Omega t$ e $\dot{y}(t) = \Omega Y \cos \Omega t$.

Parametri caratteristici del sistema vibrante:

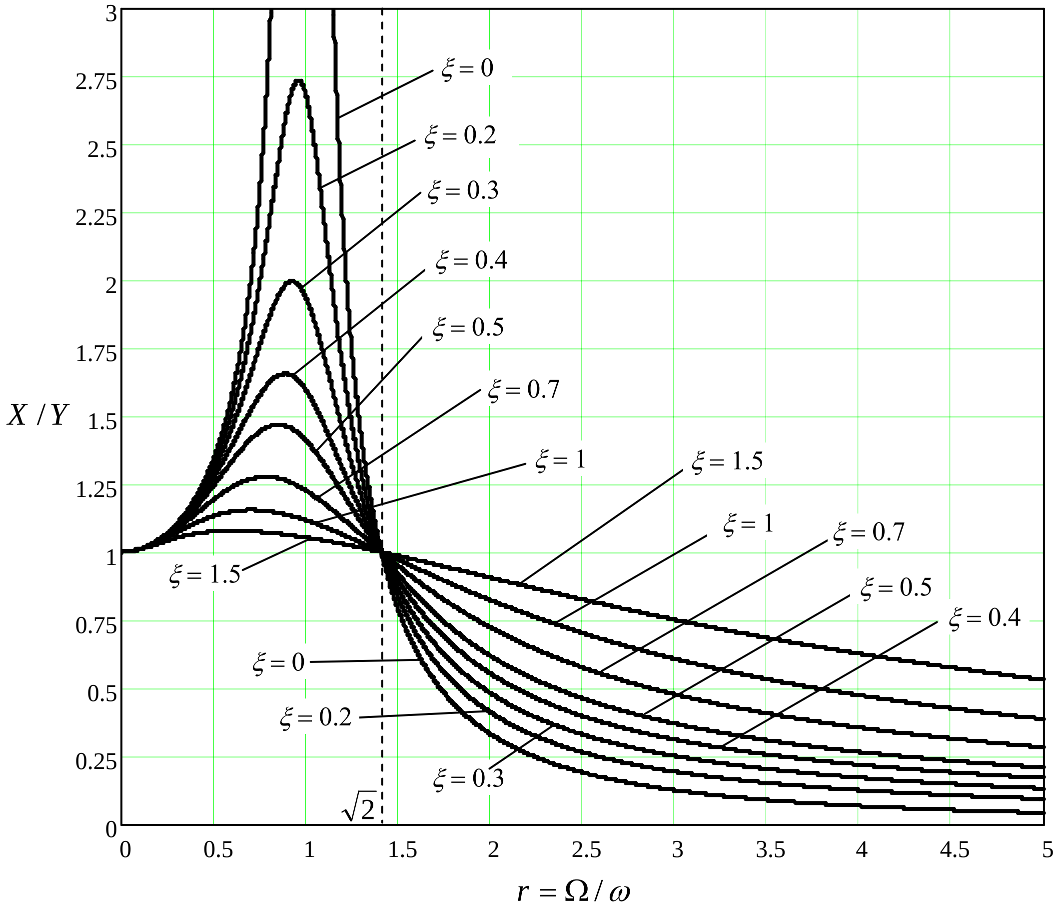
$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	**Pulsazione propria**
$c_c = 2m\omega = 2\sqrt{km}$	**Smorzamento critico**
$\xi = \dfrac{c}{c_c}$	**Fattore di smorzamento adimensionale**
$r = \dfrac{\Omega}{\omega}$	**Rapporto di frequenza**

Soluzione a regime:

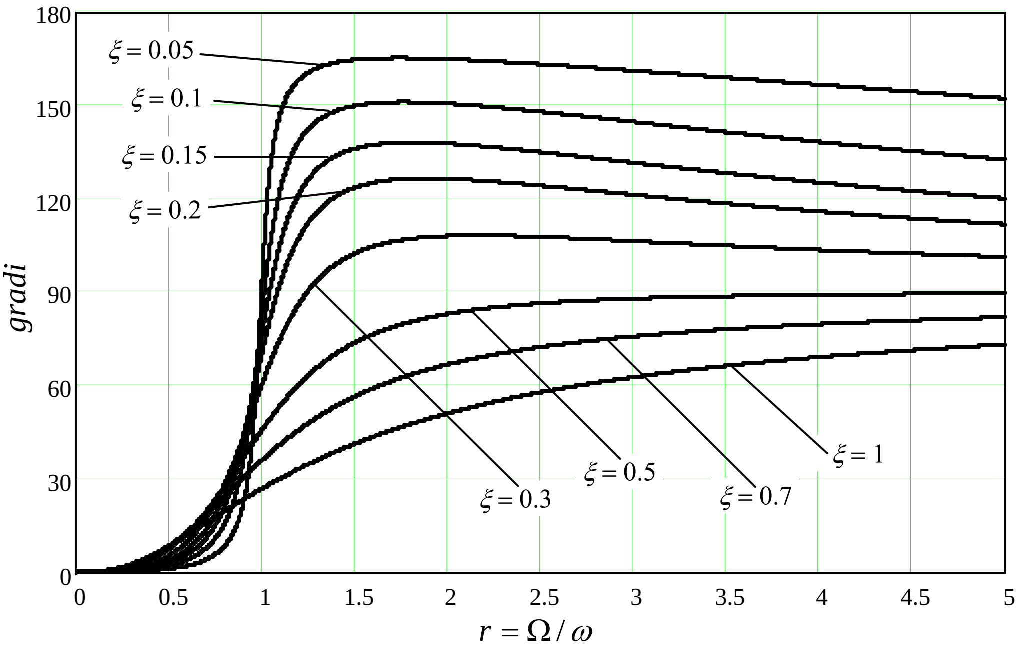
$$x(t) = X \sin(\Omega t - \varphi)$$

dove:

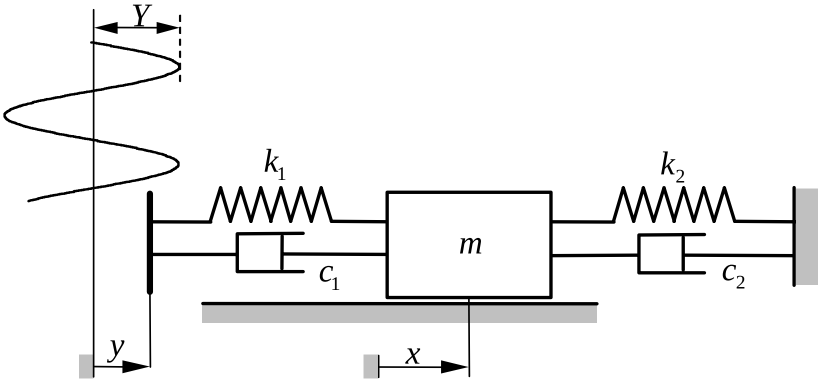
$$\begin{cases} X = Y\sqrt{\dfrac{k^2 + (c\Omega)^2}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \\[2ex] \tan\varphi = \dfrac{mc\Omega^3}{k(k - m\Omega^2) + (c\Omega)^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{X}{Y} = \sqrt{\dfrac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \\[2ex] \tan\varphi = \dfrac{2\xi r^3}{1 + (4\xi^2 - 1)r^2} \end{cases}$$



$\xi = 0$
$\xi = 0.2$
$\xi = 0.3$
$\xi = 0.4$
$\xi = 0.5$
$\xi = 0.7$
$\xi = 1$
$\xi = 1.5$
$\xi = 1.5$
$\xi = 1$
$\xi = 0.7$
$\xi = 0.5$
$\xi = 0.4$
$\xi = 0$
$\xi = 0.2$
$\xi = 0.3$
$\sqrt{2}$
X / Y
0
0.25
0.5
0.75
1
1.25
1.5
1.75
2
2.25
2.5
2.75
3
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
$r = \Omega / \omega$



$\xi = 0.05$
$\xi = 0.1$
$\xi = 0.15$
$\xi = 0.2$
$\xi = 0.3$
$\xi = 0.5$
$\xi = 0.7$
$\xi = 1$
gradi
0
30
60
90
120
150
180
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
$r = \Omega / \omega$



Nel caso più generale in cui siano presenti due molle e due smorzatori (vedi figura) si ha:

$$m\ddot{x} + c_s\dot{x} + k_s x = k_1 y + c_1\dot{y}$$

in cui $c_s = c_1 + c_2$ e $k_s = k_1 + k_2$.

Parametri caratteristici del sistema vibrante:

$\omega = \sqrt{\dfrac{k_s}{m}}$	**Pulsazione propria**
$c_c = 2m\omega = 2\sqrt{k_s m}$	**Smorzamento critico**
$\xi = \dfrac{c_s}{c_c}$	**Fattore di smorzamento adimensionale**
$r = \dfrac{\Omega}{\omega}$	**Rapporto di frequenza**
$\alpha_k = \dfrac{k_1}{k_s} = \dfrac{k_1}{k_1 + k_2}$	**Rapporto fra le rigidezze**
$\alpha_c = \dfrac{c_1}{c_s} = \dfrac{c_1}{c_1 + c_2}$	**Rapporto fra gli smorzamenti**

Soluzione a regime:

$$x(t) = X\sin(\Omega t - \varphi)$$

dove:

$$\begin{cases} X = Y\sqrt{\dfrac{k_1^2 + (c_1\Omega)^2}{(k_s - m\Omega^2)^2 + (c_s\Omega)^2}} \\[2ex] \tan\varphi = \dfrac{(c_s k_1 - c_1 k_s + m c_1 \Omega^2)\Omega}{k_1(k_s - m\Omega^2) + c_1 c_s \Omega^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{X}{Y} = \sqrt{\dfrac{\alpha_k^2 + (2\alpha_c\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \\[2ex] \tan\varphi = \dfrac{2\xi r[\alpha_c(r^2 - 1) + \alpha_k]}{\alpha_k + (4\alpha_c\xi^2 - \alpha_k)r^2} \end{cases}$$