Vibrazioni di sistemi a più gradi di libertà

Esercizio 1 - Cod. VIB-025

Determinare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare del sistema vibrante riportato in Figura 1, nell'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio.

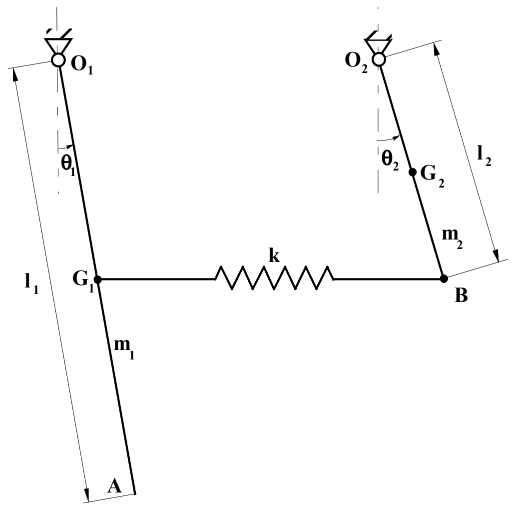


Figura 1

Dati

- Massa dell'asta O_1A .... $m_1 = 2m = 14$ kg
- Massa dell'asta O_2B .... $m_2 = m = 7$ kg
- Rigidezza della molla .... $k = 1500$ N/m
- Lunghezza dell'asta O_1A .... $l_1 = 2l = 1.8$ m
- Lunghezza dell'asta O_1B .... $l_2 = l = 0.9$ m

Soluzione

Il problema può essere facilmente risolto mediante le equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta_1} + \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta_2} + \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta_2} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

L'energia cinetica del sistema risulta:

$$T = \frac{1}{2}(J_1\dot{\vartheta}_1^2 + J_2\dot{\vartheta}_2^2) \tag{2}$$

dove J_1 e J_2 indicano rispettivamente i momenti d'inerzia delle due aste rispetto ai centri di rotazione O_1 ed O_2; trattandosi di aste omogenee si ha:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{m_1 l_1^2}{3} = \frac{2m\cdot(2l)^2}{3} = \frac{8}{3}ml^2 \\ J_2 &= \frac{m_2 l_2^2}{3} = \frac{ml^2}{3} \end{aligned} \tag{3}$$

L'energia potenziale è costituita da due termini legati al peso proprio delle aste e da un termine dipendente dalla rigidezza della molla di collegamento; assumendo come riferimento per l'energia potenziale gravitazionale la retta orizzontale passante per le cerniere O_1 ed O_2 possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} V &= -m_1 g\frac{l_1}{2}\cos\vartheta_1 - m_2 g\frac{l_2}{2}\cos\vartheta_2 + \frac{1}{2}k\left(l_2\sin\vartheta_2 - \frac{l_1}{2}\sin\vartheta_1\right)^2 \\ &= -mgl\left(2\cos\vartheta_1 + \frac{1}{2}\cos\vartheta_2\right) + \frac{1}{2}kl^2(\sin\vartheta_2 - \sin\vartheta_1)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Nell'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio (aste verticali), è possibile approssimare le funzioni seno e coseno con i rispettivi sviluppi in serie arrestati al 2° ordine; si ha pertanto:

$$\sin\vartheta \cong \vartheta \qquad \cos\vartheta \cong 1 - \frac{\vartheta^2}{2} \tag{5}$$

Utilizzando le espressioni approssimate (5) l'energia potenziale assume la forma seguente:

$$V = mgl\left(\vartheta_1^2 + \frac{1}{4}\vartheta_2^2\right) + \frac{1}{2}kl^2(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 + \text{cost.} \tag{6}$$

A questo punto è possibile calcolare i vari termini che compaiono nelle equazioni di Lagrange:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}_1}\right) = \frac{8}{3}ml^2\ddot{\vartheta}_1 \qquad \frac{\partial T}{\partial\vartheta_1} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial\vartheta_1} = (kl^2 + 2mgl)\vartheta_1 - kl^2\vartheta_2 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}_2}\right) = \frac{ml^2}{3}\ddot{\vartheta}_2 \qquad \frac{\partial T}{\partial\vartheta_2} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial\vartheta_2} = \frac{1}{2}mgl\,\vartheta_2 + kl^2(\vartheta_2 - \vartheta_1) \end{aligned} \tag{7}$$

Sostituendo le relazioni sopra riportate nel sistema (1) si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{8}{3}ml^2\ddot{\vartheta}_1 + (kl^2 + 2mgl)\vartheta_1 - kl^2\vartheta_2 = 0 \\ \frac{ml^2}{3}\ddot{\vartheta}_2 - kl^2\vartheta_1 + \left(kl^2 + \frac{1}{2}mgl\right)\vartheta_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

In forma matriciale possiamo scrivere[1]:

$$[J]\{\ddot{\vartheta}\} + [K]\{\vartheta\} = \underline{0} \tag{9}$$

dove:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} kl^2 + 2mgl & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2 + \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix} \qquad \{\vartheta\} = \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

[1] Il simbolo $\underline{0}$ indica il vettore nullo, ovvero un vettore colonna i cui elementi sono tutti nulli; ovviamente la dimensione del vettore coincide con il numero dei gradi di libertà del sistema.

Il calcolo delle pulsazioni proprie si effettua ponendo uguale a zero il determinante della matrice $[\Delta] = [K] - \omega^2[J]$:

$$|[\Delta]| = |[K] - \omega^2[J]| = \begin{vmatrix} (kl^2 + 2mgl) - \omega^2 \frac{8}{3} ml^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & \left(kl^2 + \frac{1}{2} mgl\right) - \omega^2 \frac{ml^2}{3} \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

Dividendo per l tutti gli elementi della matrice $[\Delta]$ e sviluppando il determinante, si ricava la seguente equazione caratteristica:

$$\frac{8}{9} m^2 l^2 \omega^4 - (3kl^2 m + 2m^2 gl)\omega^2 + \left(\frac{5}{2} klmg + m^2 g^2\right) = 0 \tag{12}$$

Con i dati del problema si ha:

$$35.3\, \omega^4 - 26380.2\, \omega^2 + 236476.8 = 0 \tag{13}$$

Le pulsazioni proprie risultano pertanto:

$$\omega_1 = 3.012 \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = 27.178 \text{ rad/s} \tag{14}$$

Il calcolo dei modi principali di vibrare si effettua considerando il sistema lineare algebrico:

$$\begin{cases} \left(kl^2 + 2mgl - \omega^2 \frac{8}{3} ml^2\right) \Theta_1 - kl^2 \Theta_2 = 0 \\ \\ -kl^2 \Theta_1 + \left(kl^2 + \frac{1}{2} mgl - \omega^2 \frac{ml^2}{3}\right) \Theta_2 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

in cui i simboli Θ_1 e Θ_2 indicano le ampiezze di vibrazione di ciascuna asta; da una qualsiasi delle due equazioni è possibile ricavare il rapporto fra le ampiezze di oscillazione.
Utilizzando, ad esempio, la prima equazione si ricava:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)_{\omega=\omega_1} &= \frac{kl}{kl + 2mg - \omega_1^2 \frac{8}{3} ml} = 1.011 \\ \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)_{\omega=\omega_2} &= \frac{kl}{kl + 2mg - \omega_2^2 \frac{8}{3} ml} = -0.124 \end{aligned} \tag{16}$$

I modi principali di vibrare risultano pertanto espressi dai seguenti vettori modali:

- Primo modo ($\omega = \omega_1 = 3.012$ rad/s):

$$\Phi_1 = \left\{ \begin{array}{c} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{array} \right\}_{\omega=\omega_1} = \left\{ \begin{array}{c} 1.011 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{17}$$

- Secondo modo ($\omega = \omega_2 = 27.178$ rad/s):

$$\Phi_2 = \left\{ \begin{array}{c} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{array} \right\}_{\omega=\omega_2} = \left\{ \begin{array}{c} -0.124 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{18}$$

Esercizio 2 - Cod. VIB-026

Nel sistema in Figura 1 le due aste rigide ed uniformi hanno uguale lunghezza e differenti masse.
Scrivere le equazioni di moto del sistema e determinarne le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare.

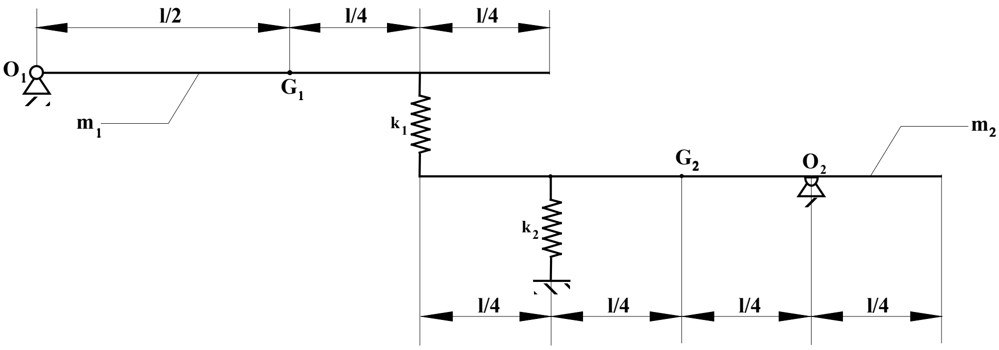


Figura 1

Dati

- Masse delle aste .... $m_1 = 1$ kg $\quad m_2 = 5$ kg
- Rigidezze delle molle .... $k_1 = 1600$ N/m $\quad k_2 = 2000$ N/m

Nota. Il momento d'inerzia baricentrico di un'asta omogenea di massa m e lunghezza l risulta pari a $J_G = ml^2/12$.

Soluzione

Il problema si può risolvere agevolmente mediante le equazioni di Lagrange.
Indichiamo con ϑ_1 e ϑ_2 gli spostamenti angolari delle due aste, misurati a partire dalla posizione di equilibrio del sistema (vedi Figura 2).

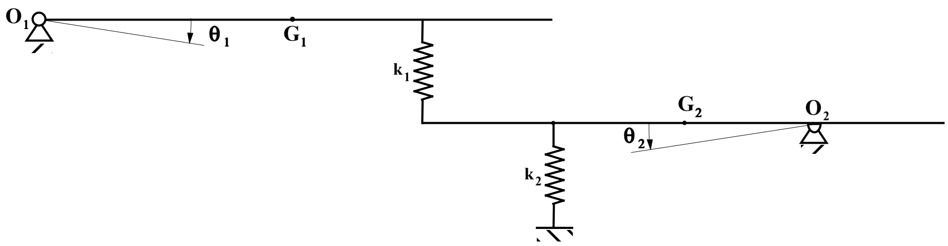


Figura 2

L'energia cinetica risulta:

$$T = \frac{1}{2}(J_1\dot{\vartheta}_1^2 + J_2\dot{\vartheta}_2^2) \tag{1}$$

dove J_1 e J_2 indicano i momenti d'inerzia delle due aste calcolati rispetto ai centri di rotazione O_1 e O_2; poiché si tratta di aste omogenee di uguale lunghezza e di massa differente si ha:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{m_1 l^2}{12} + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_1 l^2 \\ J_2 &= \frac{m_2 l^2}{12} + m_2\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}m_2 l^2 \end{aligned} \tag{2}$$

L'energia potenziale, nell'ipotesi di piccole vibrazioni nell'intorno della posizione di equilibrio, si può scrivere nella forma sotto riportata:

$$V = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{3}{4}l\vartheta_1 - \frac{3}{4}l\vartheta_2\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{l}{2}\vartheta_2\right)^2 = \frac{9}{32}k_1 l^2(\vartheta_1-\vartheta_2)^2 + \frac{1}{8}k_2 l^2\vartheta_2^2 \tag{3}$$

Le equazioni di Lagrange per il sistema in esame sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot\vartheta_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial\vartheta_1} + \dfrac{\partial V}{\partial\vartheta_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot\vartheta_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial\vartheta_2} + \dfrac{\partial V}{\partial\vartheta_2} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

in cui:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot\vartheta_1}\right) = J_1\ddot\vartheta_1 = \dfrac{1}{3}m_1 l^2\ddot\vartheta_1 & \dfrac{\partial T}{\partial\vartheta_1} = 0 & \dfrac{\partial V}{\partial\vartheta_1} = \dfrac{9}{16}k_1 l^2(\vartheta_1-\vartheta_2) \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot\vartheta_2}\right) = J_2\ddot\vartheta_2 = \dfrac{7}{48}m_2 l^2\ddot\vartheta_2 & \dfrac{\partial T}{\partial\vartheta_2} = 0 & \dfrac{\partial V}{\partial\vartheta_2} = -\dfrac{9}{16}k_1 l^2\vartheta_1 + \left(\dfrac{1}{4}k_2 l^2 + \dfrac{9}{16}k_1 l^2\right)\vartheta_2 \end{array} \tag{5}$$

Sostituendo tali espressioni nel sistema di equazioni (4) e semplificando rispetto ad l^2, si ottengono le equazioni di moto sotto riportate:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}m_1\ddot\vartheta_1 + \dfrac{9}{16}k_1\vartheta_1 - \dfrac{9}{16}k_1\vartheta_2 = 0 \\[2ex] \dfrac{7}{48}m_2\ddot\vartheta_2 - \dfrac{9}{16}k_1\vartheta_1 + \left(\dfrac{1}{4}k_2 + \dfrac{9}{16}k_1\right)\vartheta_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Come si può notare, tali equazioni risultano indipendenti dalla lunghezza delle aste.
Passando alla notazione matriciale si ha:

$$[M]\{\ddot\vartheta\} + [K]\{\vartheta\} = \underline{0} \tag{7}$$

dove:

$$[M] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3}m_1 & 0 \\ 0 & \dfrac{7}{48}m_2 \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} \dfrac{9}{16}k_1 & -\dfrac{9}{16}k_1 \\[2ex] -\dfrac{9}{16}k_1 & \dfrac{1}{4}k_2 + \dfrac{9}{16}k_1 \end{bmatrix} \qquad \{\vartheta\} = \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Le pulsazioni proprie del sistema si calcolano uguagliando a zero il determinante della matrice $[\Delta] = [K] - \omega^2[M]$:

$$|[\Delta]| = |[K] - \omega^2[M]| = \begin{vmatrix} \dfrac{9}{16}k_1 - \omega^2\dfrac{1}{3}m_1 & -\dfrac{9}{16}k_1 \\[2ex] -\dfrac{9}{16}k_1 & \left(\dfrac{1}{4}k_2 + \dfrac{9}{16}k_1\right) - \omega^2\dfrac{7}{48}m_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

L'equazione caratteristica è la seguente:

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0 \tag{10}$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} A &= \frac{7}{144}m_1 m_2 = 0.243\ \mathrm{kg}^2 \\ B &= -\left(\frac{21}{256}k_1 m_2 + \frac{1}{12}k_2 m_1 + \frac{3}{16}k_1 m_1\right) = -1122.9\ \mathrm{kg}^2\mathrm{s}^{-2} \\ C &= \frac{9}{64}k_1 k_2 = 450000\ \mathrm{kg}^2\mathrm{s}^{-4} \end{aligned} \tag{11}$$

Risolvendo l'equazione caratteristica si ottengono, per le pulsazioni proprie, i valori:

$$\omega_1 = 21.05 \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = 64.63 \text{ rad/s} \tag{12}$$

I modi principali di vibrare si calcolano utilizzando una delle due equazioni del sistema:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{9}{16}k_1 - \omega^2 \dfrac{1}{3}m_1\right)\Theta_1 - \dfrac{9}{16}k_1\Theta_2 = 0 \\ \\ -\dfrac{9}{16}k_1\Theta_1 + \left(\dfrac{1}{4}k_2 + \dfrac{9}{16}k_1 - \omega^2 \dfrac{7}{48}m_2\right) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

nelle incognite Θ_1 e Θ_2 (ampiezze di oscillazione).
Utilizzando ad esempio la prima equazione, si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)_{\omega=\omega_1} &= \frac{\dfrac{9}{16}k_1}{\dfrac{9}{16}k_1 - \omega_1^2 \dfrac{1}{3}m_1} = 1.196 \\ \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)_{\omega=\omega_2} &= \frac{\dfrac{9}{16}k_1}{\dfrac{9}{16}k_1 - \omega_2^2 \dfrac{1}{3}m_1} = -1.828 \end{aligned} \tag{14}$$

I modi principali di vibrare risultano pertanto espressi dai seguenti vettori modali:

- Primo modo ($\omega = \omega_1 = 21.05$ rad/s):

$$\Phi_1 = \left\{ \begin{array}{c} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{array} \right\}_{\omega=\omega_1} = \left\{ \begin{array}{c} 1.196 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{15}$$

- Secondo modo ($\omega = \omega_2 = 64.63$ rad/s):

$$\Phi_2 = \left\{ \begin{array}{c} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{array} \right\}_{\omega=\omega_2} = \left\{ \begin{array}{c} -1.828 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{16}$$

Esercizio 3 - Cod. VIB-027

Il sistema in Figura 1 è costituito da due pulegge collegate da una cinghia di cui si evidenzia la costante elastica k; alla puleggia di diametro maggiore è collegato un pendolo costituito da un'asta di massa trascurabile e da una massa m concentrata all'estremità.
Nell'ipotesi che la cinghia non slitti sulle pulegge, si richiede di:

1. determinare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare del sistema;
2. calcolare l'ampiezza delle oscillazioni dei due dischi in condizioni di regime, quando al disco (1) viene applicata una coppia C_m variabile nel tempo secondo la legge $C_m = C_0 \sin \Omega t$.

Nota. Si assuma l'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio (pendolo verticale).

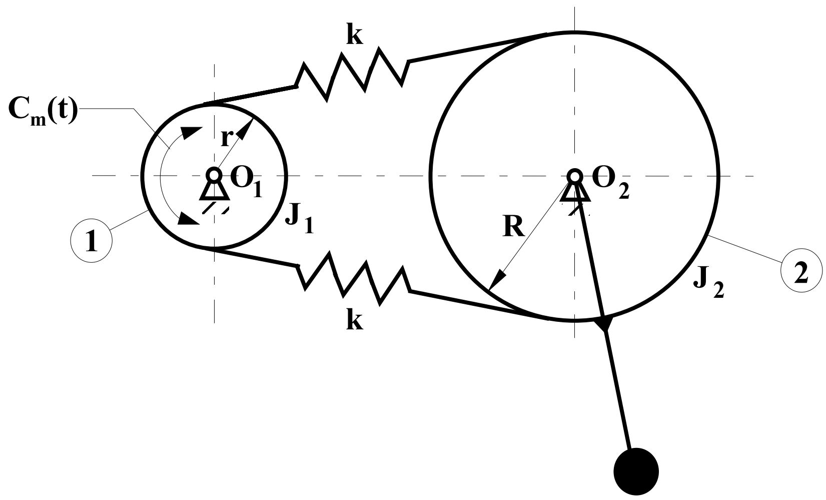


Figura 1

Dati

- Momento d'inerzia delle due pulegge .... $J_1 = 1$ kg m^2 $J_2 = 3$ kg m^2
- Raggi delle due pulegge .... $r = 0.4$ m $R = 0.8$ m
- Massa del pendolo .... $m = 5$ kg
- Lunghezza del pendolo .... $l = 1.5$ m
- Rigidezza dei due rami della cinghia .... $k = 2000$ N/m
- Ampiezza della coppia applicata .... $C_0 = 50$ Nm
- Pulsazione della coppia applicata .... $\Omega = 20$ rad/s

Soluzione

Calcolo delle pulsazioni proprie e dei modi principali di vibrare

Per ricavare le pulsazioni proprie del sistema occorre scrivere le equazioni di moto relative alle vibrazioni libere: quindi, in questa prima fase dello studio non si considererà l'effetto della forzante esterna. Se si adotta il metodo degli equilibri dinamici, occorre in primo luogo evidenziare le forze e le coppie che agiscono sugli elementi del sistema durante il moto (vedi Figura 2).
Le equazioni di equilibrio dinamico alla rotazione attorno ai perni sono le seguenti:

$$\begin{cases} J_1\ddot{\vartheta}_1 + kr(r\vartheta_1 - R\vartheta_2) - kr(R\vartheta_2 - r\vartheta_1) = 0 \\ J_2\ddot{\vartheta}_2 + kR(R\vartheta_2 - r\vartheta_1) - kR(r\vartheta_1 - R\vartheta_2) + ml^2\ddot{\vartheta}_2 + mgl\sin\vartheta_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

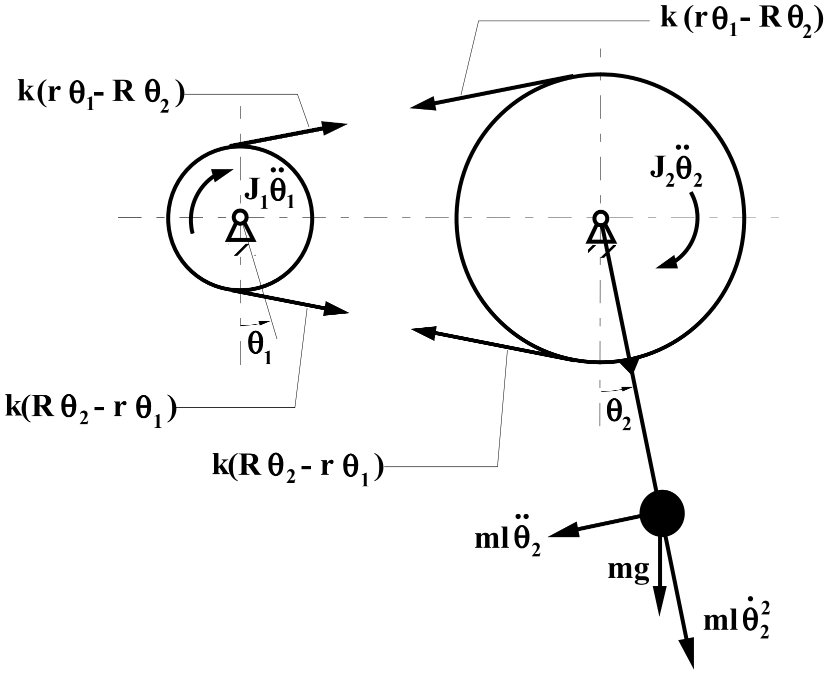


Figura 2

Ritenendo valida l'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio ($\sin\vartheta \cong \vartheta$) e semplificando opportunamente, si ottiene:

$$\begin{cases} J_1\ddot{\vartheta}_1 + 2kr^2\vartheta_1 - 2krR\,\vartheta_2 = 0 \\ (J_2+ml^2)\ddot{\vartheta}_2 - 2krR\,\vartheta_1 + (2kR^2+mgl)\vartheta_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Utilizzando ora le seguenti definizioni:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2+ml^2 \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} 2kr^2 & -2krR \\ -2krR & 2kR^2+mgl \end{bmatrix} \qquad \{\vartheta\} = \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

il sistema delle equazioni di moto può essere riscritto nella forma matriciale:

$$[J]\{\ddot{\vartheta}\} + [K]\{\vartheta\} = \underline{0} \tag{4}$$

Osservando le matrici $[J]$ e $[K]$ si osserva che il sistema presenta accoppiamento elastico (matrice $[K]$ non diagonale), mentre risulta disaccoppiato dal punto di vista inerziale (matrice $[J]$ diagonale).
Le pulsazioni proprie si calcolano ponendo uguale a zero il determinante della matrice $[\Delta] = [K] - \omega^2[J]$:

$$|[\Delta]| = |[K] - \omega^2[J]| = \begin{vmatrix} 2kr^2 - \omega^2 J_1 & -2krR \\ -2krR & (2kR^2+mgl) - \omega^2(J_2+ml^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

L'equazione caratteristica che si ottiene sviluppando il determinante è la seguente:

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0 \tag{6}$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} A &= J_1(J_2+ml^2) = 14.25\ \mathrm{kg^2m^4} \\ B &= -2kr^2(J_2+ml^2) - J_1(2kR^2+mgl) = -11753.575\ \mathrm{kg^2m^4s^{-2}} \\ C &= 2kr^2mgl = 47088\ \mathrm{kg^2m^4s^{-4}} \end{aligned} \tag{7}$$

Con i dati assegnati dal problema si ottengono, per le pulsazioni proprie, i valori sotto riportati:

$$\omega_1 = 2.006 \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = 28.649 \text{ rad/s} \tag{8}$$

Calcoliamo ora i modi principali di vibrare, considerando il sistema lineare algebrico omogeneo avente come matrice dei coefficienti la matrice $[\Delta]$; le incognite $Theta_1$ e $Theta_2$ di tale sistema rappresentano le ampiezze di vibrazione delle due pulegge.

$$\begin{cases} (2kr^2 - \omega^2 J_1)\Theta_1 - 2krR\,\Theta_2 = 0 \\ \\ -2krR\,\Theta_1 + [(2kR^2 + mgl) - \omega^2(J_2 + ml^2)]\Theta_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Avendo posto uguale a zero il determinante della matrice dei coefficienti, le due equazioni risultano equivalenti; pertanto possiamo ricavare il rapporto fra le ampiezze da una qualsiasi di esse.
Utilizzando, ad esempio, la prima equazione si ha:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)_{\omega=\omega_1} &= \frac{2krR}{2kr^2 - \omega_1^2 J_1} = 2.013 \\ \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)_{\omega=\omega_2} &= \frac{2krR}{2kr^2 - \omega_2^2 J_1} = -7.080 \end{aligned} \tag{10}$$

I modi principali di vibrare risultano pertanto espressi dai seguenti vettori modali:

- Primo modo ($\omega = \omega_1 = 2.006$ rad/s):

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_1} = \begin{Bmatrix} 2.013 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

- Secondo modo ($\omega = \omega_2 = 28.649$ rad/s):

$$\Phi_2 = \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_2} = \begin{Bmatrix} -7.080 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

Moto forzato

Inserendo nelle equazioni di moto il contributo della forzante esterna si ottiene:

$$\begin{cases} J_1\ddot{\vartheta}_1 + 2kr^2\vartheta_1 - 2krR\,\vartheta_2 = C_m(t) \\ \\ (J_2 + ml^2)\ddot{\vartheta}_2 - 2krR\,\vartheta_1 + (2kR^2 + mgl)\vartheta_2 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Poiché $C_m = C_0 \sin\Omega t$, ed il sistema è lineare, la soluzione a regime sarà del tipo:

$$\begin{cases} \vartheta_1(t) = \Theta_1 \sin\Omega t \\ \\ \vartheta_2(t) = \Theta_2 \sin\Omega t \end{cases} \tag{14}$$

dove ora i simboli Θ_1 e Θ_2 indicano ora l'ampiezza delle vibrazioni nel moto forzato in condizioni di regime.
Sostituendo tale soluzione nel sistema di equazioni e semplificando i termini armonici si ottiene:

$$\begin{cases} (2kr^2 - \Omega^2 J_1)\Theta_1 - 2krR\,\Theta_2 = C_0 \\ \\ -2krR\,\Theta_1 + [(2kR^2 + mgl) - \Omega^2(J_2 + ml^2)]\Theta_2 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Si tratta di un sistema lineare algebrico non omogeneo nelle incognite Θ_1 e Θ_2.
Con i dati del problema si ha:

$$\begin{cases} 240\,\Theta_1 - 1280\,\Theta_2 = 50 \\ \\ -1280\,\Theta_1 - 3066.425\,\Theta_2 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Risolvendo il sistema si ricava:

$$\begin{cases} \Theta_1 = 0.0646 \text{ rad} = 3.7° \\ \\ \Theta_2 = -0.027 \text{ rad} = -1.54° \end{cases} \tag{17}$$

Come si può osservare, le vibrazioni a regime avvengono in opposizione di fase, poiché le ampiezze hanno segno discorde; pertanto:

$$\begin{cases} \vartheta_1(t) = 0.0646 \ \sin 20\, t \\ \\ \vartheta_2(t) = -0.027 \ \sin 20\, t = 0.027 \ \sin(20\, t - \pi) \end{cases} \tag{18}$$

Esercizio 4 - Cod. VIB-028

Per il sistema vibrante a due gradi di libertà rappresentato in Figura 1 si chiede di calcolare:

1. le pulsazioni proprie;
2. i modi principali di vibrare;
3. l'ampiezza delle vibrazioni a regime per effetto dello spostamento impresso al punto A.

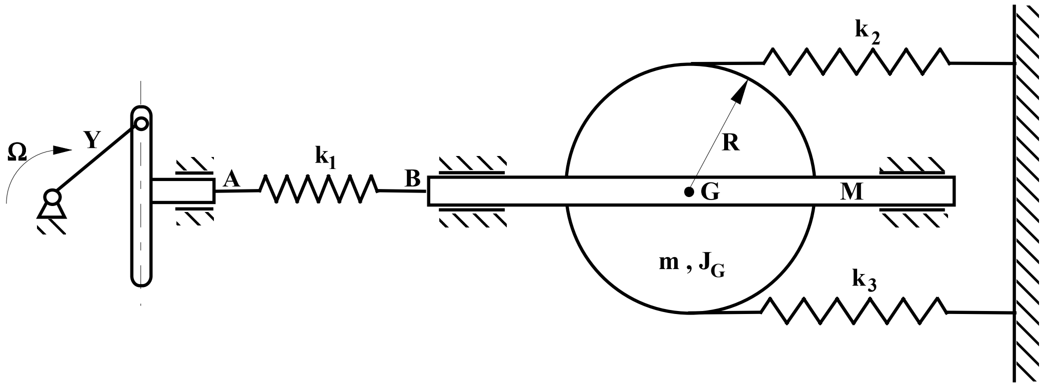


Figura 1

Dati

- Massa della slitta .... $M = 4$ kg
- Massa del disco .... $m = 1$ kg
- Momento d'inerzia baricentrico del disco .... $J_G = 0.02$ kgm^2
- Raggio del disco .... $R = 200$ mm
- Rigidezza delle molle .... $k_1 = 100$ kN/m $k_2 = 10$ kN/m $k_3 = 20$ kN/m
- Lunghezza della manovella .... $Y = 10$ mm
- Velocità angolare della manovella .... $\Omega = 100$ rad/s

Soluzione

Risolviamo il problema con il metodo degli equilibri dinamici.
Per descrivere il moto del sistema utilizziamo come coordinate libere la traslazione della slitta x e la rotazione della puleggia ϑ; il manovellismo a croce imprime al punto A uno spostamento armonico esprimibile mediante l'equazione $y(t) = Y \sin \Omega t$ (vedi Figura 2).

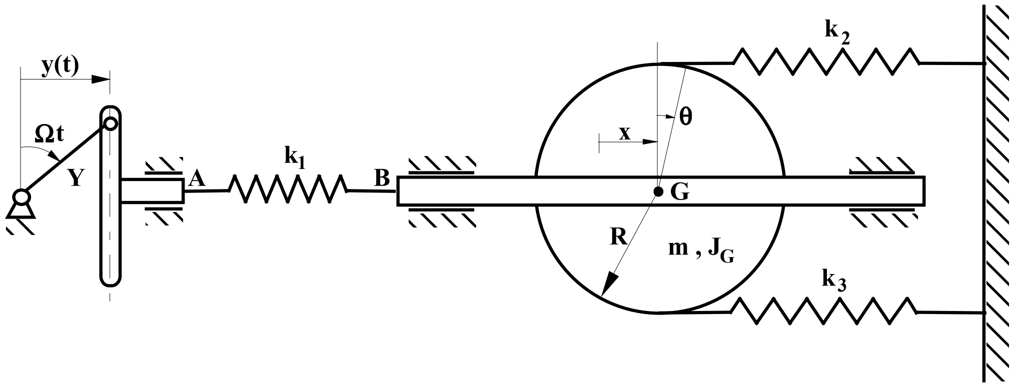


Figura 2

Per lo studio delle vibrazioni libere occorre annullare gli effetti delle forzanti esterne; pertanto porremo $y(t) = 0$. In Figura 3 sono evidenziate le forze e le coppie agenti sul sistema in condizioni di moto libero:

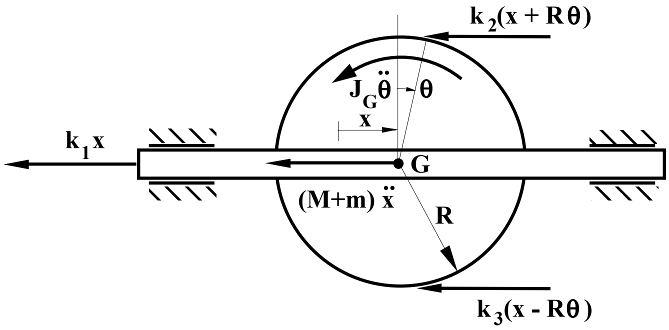


Figura 3

L'equazione di equilibrio alla traslazione per il sistema slitta-puleggia è la seguente:

$$(M+m)\ddot{x} + k_1 x + k_2(x + R\vartheta) + k_3(x - R\vartheta) = 0 \tag{1}$$

Per l'equilibrio alla rotazione della puleggia attorno al punto G si ha:

$$J_G\ddot{\vartheta} + k_2 R(x + R\vartheta) - k_3 R(x - R\vartheta) = 0 \tag{2}$$

Riordinando i vari termini si perviene al sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + (k_1 + k_2 + k_3)x + (k_2 - k_3)R\vartheta = 0 \\ \\ J_G\ddot{\vartheta} + (k_2 - k_3)Rx + (k_2 + k_3)R^2\vartheta = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Utilizzando ora le seguenti definizioni:

$$[M] = \begin{bmatrix} M+m & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} (k_1+k_2+k_3) & (k_2-k_3)R \\ (k_2-k_3)R & (k_2+k_3)R^2 \end{bmatrix} \qquad \{x\} = \begin{Bmatrix} x \\ \vartheta \end{Bmatrix} \tag{4}$$

il sistema delle equazioni di moto può essere riscritto nella forma matriciale sotto riportata:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \underline{0} \tag{5}$$

A questo punto possiamo calcolare le pulsazioni proprie del sistema, annullando il determinante della matrice $[\Delta] = [K] - \omega^2[M]$:

$$|[\Delta]| = |[K] - \omega^2[M]| = \begin{vmatrix} (k_1+k_2+k_3) - \omega^2(M+m) & (k_2-k_3)R \\ (k_2-k_3)R & (k_2+k_3)R^2 - \omega^2 J_G \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Con semplici passaggi algebrici si perviene all'equazione caratteristica:

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0 \tag{7}$$

in cui:

$$\begin{aligned} A &= (M+m)J_G = 0.1\ \mathrm{kg^2m^2} \\ B &= -[(M+m)(k_2+k_3)R^2 + (k_1+k_2+k_3)J_G] = -8600\ \mathrm{kg^2m^2s^{-2}} \\ C &= (k_1k_2 + k_1k_3 + 4\,k_2k_3)R^2 = 1.52 \times 10^8\ \mathrm{kg^2m^2s^{-4}} \end{aligned} \tag{8}$$

Risolvendo l'equazione caratteristica si ottengono, per le pulsazioni proprie, i valori sotto riportati:

$$\omega_1 = 157.7\ \mathrm{rad/s} \qquad \omega_2 = 247.3\ \mathrm{rad/s} \tag{9}$$

Calcoliamo ora i modi principali di vibrare considerando il sistema lineare omogeneo, avente come incognite le ampiezze di oscillazione X e Θ e come matrice dei coefficienti la matrice $[\Delta]$.

$$\begin{cases} [(k_1 + k_2 + k_3) - \omega^2(M+m)]\,X + (k_2 - k_3)R\,\Theta = 0 \\ \\ (k_2 - k_3)R\,X + [(k_2 + k_3)R^2 - \omega^2 J_G]\,\Theta = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Da una qualsiasi delle due equazioni è possibile ricavare il rapporto fra le ampiezze di oscillazione; ad esempio dalla seconda si ricava:

$$\begin{aligned} \left(\frac{X}{\Theta}\right)_{\omega=\omega_1} &= \frac{(k_2+k_3)R^2 - \omega_1^2 J_G}{(k_3 - k_2)R} = 0.351 \text{ m/rad} \\ \left(\frac{X}{\Theta}\right)_{\omega=\omega_2} &= \frac{(k_2+k_3)R^2 - \omega_2^2 J_G}{(k_3 - k_2)R} = -0.011 \text{ m/rad} \end{aligned} \tag{11}$$

I modi principali di vibrare risultano pertanto espressi dai seguenti vettori modali:

- Primo modo ($\omega = \omega_1 = 157.7$ rad/s):

$$\Phi_1 = \left\{ \begin{array}{c} X \\ \Theta \end{array} \right\}_{\omega=\omega_1} = \left\{ \begin{array}{c} 0.351 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{12}$$

- Secondo modo ($\omega = \omega_2 = 247.3$ rad/s):

$$\Phi_2 = \left\{ \begin{array}{c} X \\ \Theta \end{array} \right\}_{\omega=\omega_2} = \left\{ \begin{array}{c} -0.011 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{13}$$

Moto forzato

Per il calcolo delle ampiezze di oscillazione in condizioni di regime sinusoidale permanente occorre considerare nelle equazioni di moto il contributo della forzante armonica; a tale scopo basta osservare che, a causa dello spostamento del punto A, la forza esercitata dalla molla di rigidezza k_1 vale $k_1(x-y)$; il sistema delle equazioni di moto diviene pertanto:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + (k_1 + k_2 + k_3)x + (k_2 - k_3)R\vartheta = k_1 Y \sin\Omega t \\ \\ J_G\ddot{\vartheta} + (k_2 - k_3)Rx + (k_2 + k_3)R^2\vartheta = 0 \end{cases} \tag{14}$$

La soluzione a regime sarà:

$$\begin{cases} x(t) = X \sin\Omega t \\ \\ \vartheta(t) = \Theta \sin\Omega t \end{cases} \tag{15}$$

in cui i simboli X e Θ indicano ora le ampiezze di vibrazione in condizioni di regime.
Sostituendo le espressioni di $x(t)$ e $\vartheta(t)$ con le loro derivate seconde nelle equazioni di moto e semplificando i termini armonici si ricava:

$$\begin{cases} [(k_1 + k_2 + k_3) - \Omega^2(M+m)]\,X + (k_2 - k_3)R\,\Theta = k_1 Y \\ \\ (k_2 - k_3)R\,X + [(k_2 + k_3)R^2 - \Omega^2 J_G]\,\Theta = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Con i dati del problema si ottiene:

$$\begin{cases} 80\,X - 2\,\Theta = 1 \\ \\ -2\,X + \Theta = 0 \end{cases} \tag{17}$$

da cui:

$$\begin{cases} X = 0.0132 \text{ m} = 13.2 \text{ mm} \\ \\ \Theta = 0.0263 \text{ rad} = 1.51^\circ \end{cases} \tag{18}$$

Esercizio 5 - Cod. VIB-029

Il meccanismo rappresentato in Figura 1 è collocato in un piano orizzontale ed è costituito dai seguenti elementi:

- una puleggia di raggio R e momento d'inerzia J_1 rotante attorno al punto O_1;
- una puleggia di raggio $2R$ e momento d'inerzia J_2 rotante attorno al punto O_2;
- un'asta AB di massa m, che costituisce la biella del parallelogramma articolato O_2ABO_3;
- un'asta O_3C, di massa trascurabile e lunghezza $l = 3R$, alla cui estremità superiore è fissata una massa puntiforme M;
- una cinghia di trasmissione i cui rami presentano una rigidezza k assegnata;
- una molla torsionale, avente rigidezza k_t, che esercita un richiamo elastico sull'asta O_3C.

Supponendo che le manovelle O_2A e O_3B abbiano lunghezza pari ad R, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto del sistema in assenza di forzanti esterne;
2. calcolare le pulsazioni proprie e i rapporti fra le ampiezze di oscillazione per ciascuno dei modi principali di vibrare;
3. determinare le ampiezze di oscillazione in condizioni di regime quando alla puleggia di raggio minore viene applicata una coppia $C(t)$ variabile del tempo secondo la legge $C(t) = C_0 \sin \Omega t$.

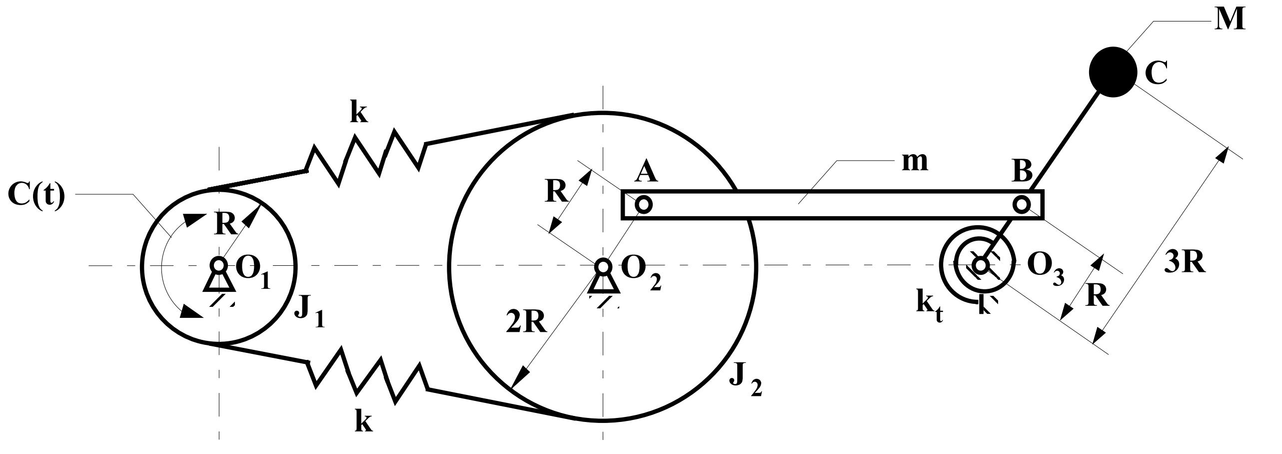


Figura 1

Dati

- Raggio .... $R = 0.1$ m
- Momento d'inerzia della puleggia di raggio minore .... $J_1 = 5 \times 10^{-3}$ kgm^2
- Momento d'inerzia della puleggia di raggio maggiore .... $J_2 = 6 \times 10^{-2}$ kgm^2
- Massa della biella AB .... $m = 1$ kg
- Massa concentrata nel punto C .... $M = 2$ kg
- Rigidezza dei due rami della cinghia .... $k = 3000$ N/m
- Rigidezza della molla torsionale .... $k_t = 50$ Nm
- Ampiezza della coppia applicata .... $C_0 = 5$ Nm
- Pulsazione della coppia applicata .... $\Omega = 10$ rad/s

Soluzione

Il sistema è collocato in un piano orizzontale, quindi non intervengono le forze peso. Alla puleggia di diametro maggiore è collegata, tramite il perno A, una biella AB che trasmette il movimento all'asta O_3C; poiché il quadrilatero O_2ABO_3 è un parallelogramma articolato, la biella AB si muove di moto traslatorio curvilineo con velocità pari a quella del punto A, mentre l'asta O_3C si muove esattamente come la puleggia di diametro maggiore; da tali considerazioni si deduce che, per descrivere il moto del sistema, bastano due sole coordinate angolari, che indichiamo con ϑ_1 e ϑ_2 (vedi Figura 2).

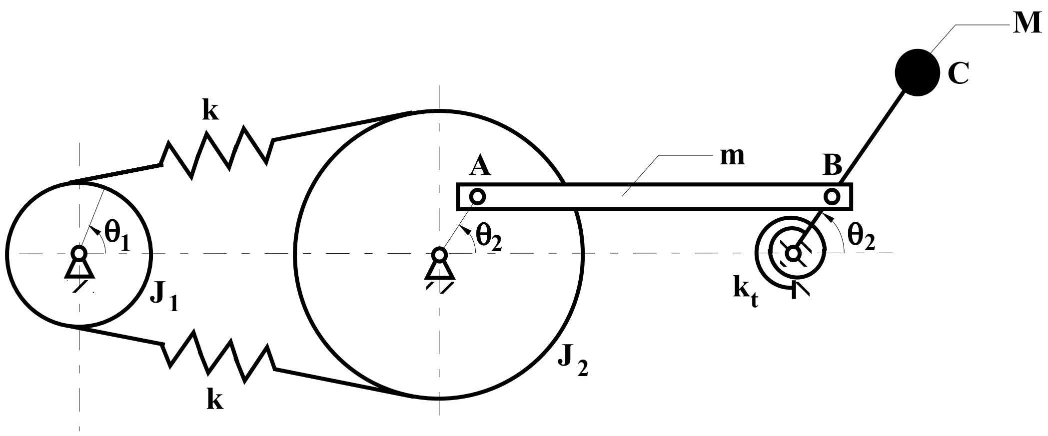


Figura 2

Sulla base delle considerazioni cinematiche sopra riportate possiamo scrivere

$$v = R\dot{\vartheta}_2 \qquad v_C = 3R\dot{\vartheta}_2 \tag{1}$$

dove v e v_C indicano rispettivamente la velocità di traslazione della biella e la velocità del punto C. Pertanto l'energia cinetica del sistema risulta:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(J_1\dot{\vartheta}_1^2 + J_2\dot{\vartheta}_2^2 + mv^2 + Mv_C^2) \\ &= \frac{1}{2}\left[J_1\dot{\vartheta}_1^2 + (J_2 + mR^2 + 9MR^2)\dot{\vartheta}_2^2\right] \end{aligned} \tag{2}$$

L'energia potenziale vale:

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \frac{1}{2}k(2R\vartheta_2 - R\vartheta_1)^2 + \frac{1}{2}k_t\vartheta_2^2 \\ &= kR^2(2\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 + \frac{1}{2}k_t\vartheta_2^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Nel caso di vibrazioni libere le equazioni di Lagrange assumono la forma seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta_1} + \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta_2} + \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta_2} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

in cui:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_1}\right) = J_1\ddot{\vartheta}_1 & \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta_1} = 0 & \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta_1} = -2kR^2(2\vartheta_2 - \vartheta_1) \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_2}\right) = (J_2 + mR^2 + 9MR^2)\ddot{\vartheta}_2 & \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta_2} = 0 & \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta_2} = 4kR^2(2\vartheta_2 - \vartheta_1) + k_t\vartheta_2 \end{array} \tag{5}$$

Sostituendo tali espressioni nelle equazioni () e riordinando i termini si ha:

$$\begin{cases} J_1\ddot{\vartheta}_1 + 2kR^2\vartheta_1 - 4kR^2\vartheta_2 = 0 \\[2ex] (J_2 + mR^2 + 9MR^2)\ddot{\vartheta}_2 - 4kR^2\vartheta_1 + (8kR^2 + k_t)\vartheta_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Passando alla notazione matriciale si ha:

$$[J]\{\ddot{\vartheta}\} + [K]\{\vartheta\} = \underline{0} \tag{7}$$

dove

$$[J] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 + (m+9M)R^2 \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} 2kR^2 & -4kR^2 \\ -4kR^2 & 8kR^2 + k_t \end{bmatrix} \qquad \{\vartheta\} = \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Calcoliamo le pulsazioni proprie del sistema uguagliando a zero il determinante della matrice $[\Delta] = [K] - \omega^2[J]$:

$$|[\Delta]| = |[K] - \omega^2[J]| = \begin{vmatrix} 2kR^2 - \omega^2 J_1 & -4kR^2 \\ -4kR^2 & (8kR^2 + k_t) - \omega^2[J_2 + (m+9M)R^2] \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Per semplicità di scrittura poniamo:

$$\begin{aligned} k_{eq} &= 8kR^2 + k_t = 290 \text{ Nm} \\ J_{eq} &= J_2 + (m+9M)R^2 = 0.25 \text{ kgm}^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Sviluppando il determinante si ottiene l'equazione caratteristica, le cui soluzioni, come è noto, forniscono le pulsazioni proprie del sistema:

$$J_1 J_{eq}\omega^4 - (J_1 k_{eq} + 2kR^2 J_{eq})\omega^2 + (2kR^2 k_{eq} - 16k^2R^4) = 0 \tag{11}$$

Posto

$$\begin{aligned} A &= J_1 J_{eq} = 0.00125 \text{ kg}^2\text{m}^4 \\ B &= -(J_1 k_{eq} + 2kR^2 J_{eq}) = -16.45 \text{ kg}^2\text{m}^4\text{s}^{-2} \\ C &= 2kR^2 k_{eq} - 16k^2R^4 = 3000 \text{ kg}^2\text{m}^4\text{s}^{-4} \end{aligned} \tag{12}$$

le pulsazioni proprie risultano:

$$\omega_1 = 13.6 \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = 113.9 \text{ rad/s} \tag{13}$$

Per il calcolo dei modi principali di vibrare, consideriamo il sistema lineare algebrico omogeneo nelle incognite Θ_1 e Θ_2 (ampiezze di vibrazione), avente come matrice dei coefficienti la matrice $[\Delta]$:

$$\begin{cases} (2kR^2 - \omega^2 J_1)\Theta_1 - 4kR^2\Theta_2 = 0 \\ -4kR^2\Theta_1 + (k_{eq} - \omega^2 J_{eq})\Theta_2 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Da una qualsiasi delle due equazioni è possibile ricavare il rapporto fra le ampiezze di oscillazione; utilizzando, ad esempio, la prima si ricava:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)_{\omega=\omega_1} &= \frac{4kR^2}{2kR^2 - \omega_1^2 J_1} = 2.031 \\ \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)_{\omega=\omega_2} &= \frac{4kR^2}{2kR^2 - \omega_2^2 J_1} = -24.615 \end{aligned} \tag{15}$$

I modi principali di vibrare risultano pertanto espressi dai seguenti vettori modali:

- Primo modo ($\omega = \omega_1 = 13.6$ rad/s):

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_1} = \begin{Bmatrix} 2.031 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

- Secondo modo ($\omega = \omega_2 = 113.9$ rad/s):

$$\Phi_2 = \begin{Bmatrix} \vartheta \\ \vartheta \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_2} = \begin{Bmatrix} -24.615 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

Moto forzato

Per quanto riguarda il moto forzato, si possono riscrivere le equazioni di Lagrange nella forma seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta_1} + \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta_1} = \dfrac{\delta L}{\delta \vartheta_1} \\ \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta_2} + \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta_2} = \dfrac{\delta L}{\delta \vartheta_2} \end{cases} \tag{18}$$

in cui δL indica il lavoro virtuale delle azioni (forze e coppie) che non ammettono potenziale; nel nostro caso l'unica azione di questo tipo è la coppia $C(t)$ applicata alla puleggia di diametro minore; si ha pertanto:

$$\frac{\delta L}{\delta \vartheta_1} = C(t) = C_0 \sin \Omega t \qquad\qquad \frac{\delta L}{\delta \vartheta_2} = 0 \tag{19}$$

Le equazioni relative al moto forzato sono quindi le seguenti:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\vartheta}_1 + 2kR^2 \vartheta_1 - 4kR^2 \vartheta_2 = C_0 \sin \Omega t \\ \\ (J_2 + mR^2 + 9MR^2)\ddot{\vartheta}_2 - 4kR^2 \vartheta_1 + (8kR^2 + k_t)\vartheta_2 = 0 \end{cases} \tag{20}$$

La soluzione a regime per tale sistema si può scrivere nella forma:

$$\begin{cases} \vartheta_1(t) = \Theta_1 \sin \Omega t \\ \\ \vartheta_2(t) = \Theta_2 \sin \Omega t \end{cases} \tag{21}$$

in cui Θ_1 e Θ_2 indicano ora le ampiezze di vibrazione nel moto a regime.
Sostituendo le espressioni di $\vartheta_1(t)$ e $\vartheta_2(t)$ con le loro derivate seconde nelle equazioni di moto e semplificando i termini armonici si ricava:

$$\begin{cases} (2kR^2 - \Omega^2 J_1)\Theta_1 - 4kR^2 \Theta_2 = C_0 \\ \\ -4kR^2 \Theta_1 + (k_{eq} - \Omega^2 J_{eq})\Theta_2 = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Con i dati del problema si ottiene:

$$\begin{cases} 59.5\ \Theta_1 - 120\ \Theta_2 = 5 \\ \\ -120\ \Theta_1 + 265\ \Theta_2 = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Risolvendo il sistema lineare si ha:

$$\begin{cases} \Theta_1 = 0.969 \text{ rad} = 55.5^\circ \\ \\ \Theta_2 = 0.439 \text{ rad} = 25.1^\circ \end{cases} \tag{24}$$

La soluzione a regime risulta pertanto:

$$\begin{cases} \vartheta_1(t) = 0.969\ \sin 10\, t \\ \\ \vartheta_2(t) = 0.439\ \sin 10\, t \end{cases} \tag{25}$$

Esercizio 6 - Cod. VIB-030

Determinare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare per il sistema vibrante riportato in Figura 1.
Nota. Si osservi che il corpo rigido costituito dai due dischi coassiali è sospeso (quindi non è incernierato nel punto G).

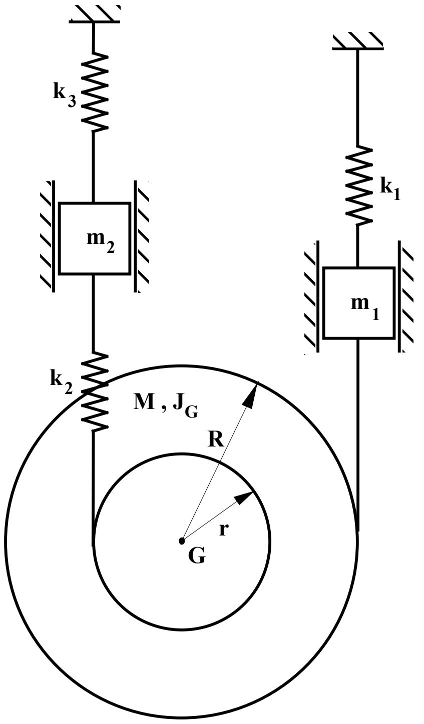


Figura 1

Dati

- Masse traslanti .... $m_1 = 2$ kg $m_2 = 3.6$ kg
- Massa dei due dischi coassiali .... $M = 25$ kg
- Momento d'inerzia baricentrico dei due dischi coassiali .... $J_G = 0.6$ kgm^2
- Rigidezze delle molle .... $k_1 = 900$ N/m $k_2 = 350$ N/m $k_3 = 500$ N/m
- Raggi dei dischi .... $R = 0.25$ m $r = 0.15$ m

Soluzione

Per descrivere il moto del sistema utilizziamo le seguenti coordinate (misurate a partire dalla posizione di equilibrio statico):

x_1: spostamento verticale della massa m_1;
x_2: spostamento verticale della massa m_2;
x_3: spostamento verticale del punto G (baricentro del corpo rigido);
ϑ: rotazione del corpo rigido.

Volendo utilizzare le equazioni di Lagrange per risolvere il problema, è necessario calcolare l'energia cinetica e potenziale del sistema.

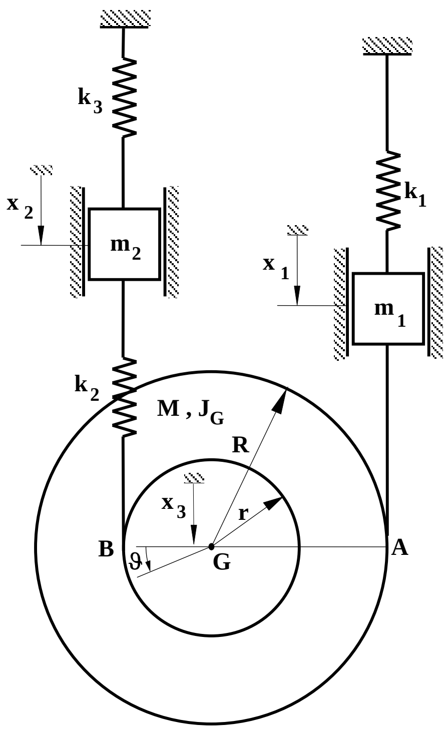


Figura 2

Poiché le masse m_1 ed m_2 si muovono di moto traslatorio, mentre il corpo rigido compie un moto rototraslatorio, l'energia cinetica assume la seguente espressione:

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + M\dot{x}_3^2 + J_G\dot{\vartheta}^2) \tag{1}$$

Misurando le coordinate a partire dalla posizione di equilibrio statico, i termini gravitazionali non compaiono nell'espressione dell'energia potenziale complessiva; sia ha pertanto:

$$V = \frac{1}{2}[k_1 x_1^2 + k_2(x_B - x_2)^2 + k_3 x_2^2] \tag{2}$$

dove x_B indica lo spostamento verticale del punto B, assunto positivo verso il basso.
Per il sistema in esame valgono inoltre le seguenti relazioni cinematiche:

$$x_B = x_1 + (R + r)\vartheta \qquad\qquad x_3 = x_1 + R\vartheta \tag{3}$$

Poiché è possibile esprimere x_3 in funzione di x_1 e ϑ, la coordinata x_3 risulta ridondante; il sistema ha pertanto tre gradi di libertà e le coordinate x_1, x_2 e ϑ sono sufficienti a descriverne il movimento. L'energia cinetica e l'energia potenziale possono quindi essere riscritte nella forma seguente:

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + M(\dot{x}_1 + R\dot{\vartheta})^2 + J_G\dot{\vartheta}^2\right] \tag{4}$$

$$V = \frac{1}{2}\left\{k_1 x_1^2 + k_2[x_1 + (R + r)\vartheta - x_2]^2 + k_3 x_2^2\right\} \tag{5}$$

Scriviamo ora le equazioni di Lagrange per il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \\ \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x_2} + \dfrac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \\ \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta} + \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

I singoli termini valgono:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = (m_1+M)\ddot{x}_1 + MR\ddot{\vartheta} && \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 && \frac{\partial V}{\partial x_1} = (k_1+k_2)x_1 + k_2(R+r)\vartheta - k_2 x_2 \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2 && \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 && \frac{\partial V}{\partial x_2} = -k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 - k_2(R+r)\vartheta \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = MR\ddot{x}_1 + (J_G+MR^2)\ddot{\vartheta} && \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0 && \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = k_2(R+r)x_1 + k_2(R+r)^2\vartheta - k_2(R+r)x_2
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Sostituendo le espressioni precedenti nelle equazioni di Lagrange si ottiene:

$$
\begin{cases}
(m_1+M)\ddot{x}_1 + MR\ddot{\vartheta} + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 + k_2(R+r)\vartheta = 0 \\
m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 - k_2(R+r)\vartheta = 0 \\
MR\ddot{x}_1 + (J_G+MR^2)\ddot{\vartheta} + k_2(R+r)x_1 - k_2(R+r)x_2 + k_2(R+r)^2\vartheta = 0
\end{cases}
\tag{8}
$$

In forma matriciale possiamo scrivere:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \underline{0} \tag{9}$$

dove $\{x\} = \{x_1\ x_2\ \vartheta\}^T$ indica il vettore delle coordinate libere, mentre le matrici $[M]$ e $[K]$ sono definite dalle espressioni seguenti:

$$
[M] = \begin{bmatrix} (m_1+M) & 0 & MR \\ 0 & m_2 & 0 \\ MR & 0 & (J_G+MR^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 6.25 \\ 0 & 3.6 & 0 \\ 6.25 & 0 & 2.1625 \end{bmatrix} \tag{10}
$$

$$
[K] = \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & k_2(R+r) \\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_2(R+r) \\ k_2(R+r) & -k_2(R+r) & k_2(R+r)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1250 & -350 & 140 \\ -350 & 850 & -140 \\ 140 & -140 & 56 \end{bmatrix} \tag{11}
$$

Le pulsazioni proprie del sistema si ricavano uguagliando a zero il determinante della matrice $[\Delta] = [K] - \omega^2[M]$:

$$
|[\Delta]| = |[K] - \omega^2[M]| = \begin{vmatrix} 1250 - 27\,\omega^2 & -350 & 140 - 6.25\,\omega^2 \\ -350 & 850 - 3.6\,\omega^2 & -140 \\ 140 - 6.25\,\omega^2 & -140 & 56 - 2.1625\,\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{12}
$$

Sviluppando il determinante si ottiene la seguente equazione caratteristica:

$$A\omega^6 + B\omega^4 + C\omega^2 + D = 0 \tag{13}$$

in cui:

$$
\begin{aligned}
A &= -69.57 \\
B &= 25300.7 \\
C &= -2095190 \\
D &= 25200000
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica forniscono le pulsazioni proprie del sistema; nel nostro caso si ottengono i seguenti valori:

$$\omega_1 = 3.801 \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = 10.05 \text{ rad/s} \qquad \omega_3 = 15.755 \text{ rad/s} \tag{15}$$

Il calcolo dei modi principali di vibrare si effettua considerando il sistema lineare algebrico omogeneo:

$$[\Delta]\{x\} = \underline{0} \tag{16}$$

ovvero:

$$
\begin{bmatrix} 1250 - 27\,\omega^2 & -350 & 140 - 6.25\,\omega^2 \\ -350 & 850 - 3.6\,\omega^2 & -140 \\ 140 - 6.25\,\omega^2 & -140 & 56 - 2.1625\,\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{17}
$$

in cui i simboli X_1, X_2 e Θ indicano le ampiezze di vibrazione relative a ciascun grado di libertà; da tale sistema, ponendo $\omega = \omega_i$ $(i = 1.2.3)$, è possibile ricavare le ampiezze di oscillazione corrispondenti a ciascun modo principale di vibrare.

Con i dati del problema si ottiene:

- Primo modo ($\omega = \omega_1 = 3.801$ rad/s):

$$\Phi_1 = \left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \Theta \end{array} \right\}_{\omega=\omega_1} = \left\{ \begin{array}{c} 0.0166 \\ 0.1827 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{18}$$

- Secondo modo ($\omega = \omega_2 = 10.05$ rad/s):

$$\Phi_2 = \left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \Theta \end{array} \right\}_{\omega=\omega_2} = \left\{ \begin{array}{c} -0.3424 \\ 0.0414 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{19}$$

- Terzo modo ($\omega = \omega_3 = 15.755$ rad/s):

$$\Phi_3 = \left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \Theta \end{array} \right\}_{\omega=\omega_3} = \left\{ \begin{array}{c} -0.1089 \\ -2.3365 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{20}$$

Esercizio 7 - Cod. VIB-031

Il sistema vibrante rappresentato in Figura 1 è collocato in un piano verticale ed è costituito dai seguenti elementi:

- un disco (1) di raggio r_1 e momento d'inerzia baricentrico J_1 ruotante attorno al punto fisso O_1;
- un disco (2) di raggio r_2, massa m_2 e momento d'inerzia baricentrico J_2, che rotola senza strisciare sul piano d'appoggio;
- un'asta $\mathrm{O_1P}$, solidale con il disco (1), avente lunghezza pari ad l e massa trascurabile;
- una massa puntiforme M collocata in corrispondenza del punto P;
- un manovellismo a croce, la cui manovella $\mathrm{O_3A}$ ruota a velocità costante Ω;
- una fune di collegamento fra gli elementi del sistema (di massa trascurabile);
- tre molle di rigidezza k_1, k_2 e k_3.

Il sistema è in equilibrio quando la manovella $\mathrm{O_3A}$ e l'asta $\mathrm{O_1P}$ si trovano in posizione verticale. Assumendo l'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto del sistema;
2. determinare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
3. calcolare le ampiezze di oscillazione in condizioni di regime.

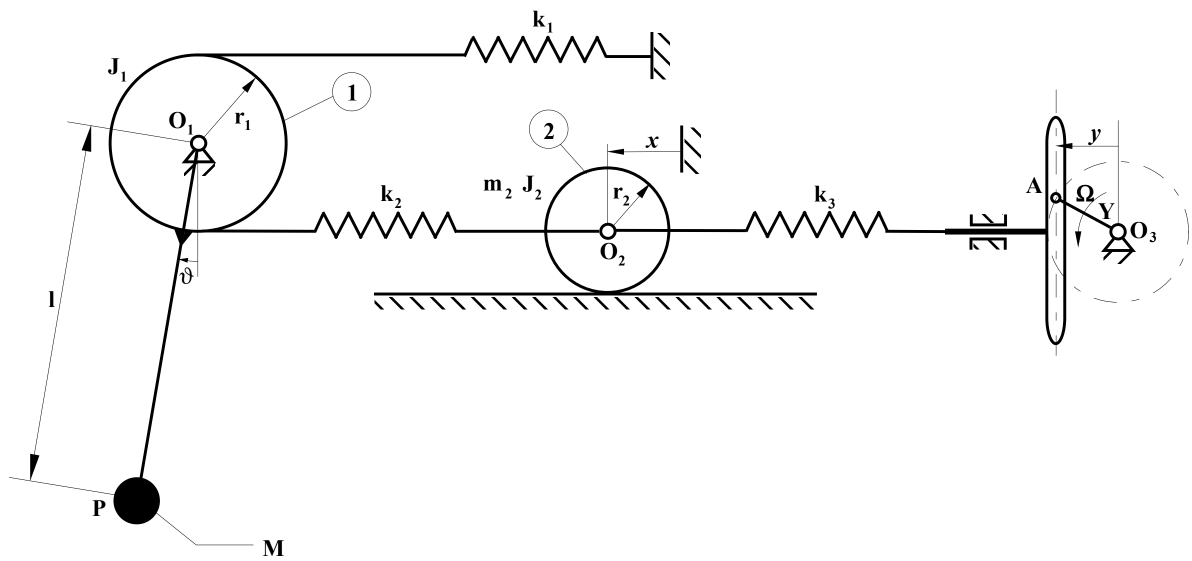


Figura 1

Dati

- Raggio del disco (1) .... $r_1 = 0.2$ m
- Raggio del disco (2) .... $r_2 = 0.15$ m
- Momento d'inerzia baricentrico del disco (1) .... $J_1 = 0.03$ kgm^2
- Momento d'inerzia baricentrico del disco (2) .... $J_2 = 0.018$ kgm^2
- Massa del disco (2) .... $m_2 = 1$ kg
- Lunghezza dell'asta $\mathrm{O_1P}$ .... $l = 0.9$ m
- Massa del punto P .... $M = 0.5$ kg
- Rigidezza delle molle .... $k_1 = 3000$ N/m $k_2 = 4000$ N/m $k_3 = 6000$ N/m
- Lunghezza della manovella $\mathrm{O_3A}$ .... $Y = 0.05$ m
- Velocità angolare della manovella $\mathrm{O_3A}$ .... $\Omega = 60$ rad/s

Soluzione

Risolviamo il problema con il metodo delle equazioni di Lagrange, assumendo come coordinate libere la rotazione ϑ del disco (1) e lo spostamento x del baricentro del disco (2); il moto della proiezione del punto A in direzione orizzontale è descritto dalla coordinata $y(t) = Y \sin \Omega t$ e viene imposto al sistema mediante il manovellismo a croce.
Le equazioni di Lagrange risultano:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta} + \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

L'energia cinetica e l'energia potenziale assumono la forma seguente:

$$T = \frac{1}{2}\left[(J_1 + Ml^2)\dot{\vartheta}^2 + \left(m_2 + \frac{J_2}{r_2^2}\right)\dot{x}^2\right] \tag{2}$$

$$V = \frac{1}{2}\left[k_1(r_1\vartheta)^2 + k_2(r_1\vartheta - x)^2 + k_3(x-y)^2\right] - Mgl\cos\vartheta \tag{3}$$

Il calcolo delle derivate parziali che compaiono nelle equazioni (1) fornisce i risultati sotto riportati:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = (J_1 + Ml^2)\ddot{\vartheta} & \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0 & \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta} = k_1 r_1^2 \vartheta + k_2 r_1(r_1\vartheta - x) + Mgl\sin\vartheta \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \left(m_2 + \dfrac{J_2}{r_2^2}\right)\ddot{x} & \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial V}{\partial x} = -k_2(r_1\vartheta - x) + k_3(x-y) \end{array} \tag{4}$$

Sostituendo le espressioni (4) nelle equazioni (1) e assumendo l'ipotesi di piccole oscillazioni dell'asta O_1P nell'intorno della posizione di equilibrio ($\sin\vartheta \cong \vartheta$), si perviene, dopo semplici passaggi, alle equazioni di moto del sistema:

$$\begin{cases} (J_1 + Ml^2)\ddot{\vartheta} + [(k_1 + k_2)r_1^2 + Mgl]\vartheta - k_2 r_1 x = 0 \\[2ex] \left(m_2 + \dfrac{J_2}{r_2^2}\right)\ddot{x} - k_2 r_1 \vartheta + (k_2 + k_3)x = k_3 y \end{cases} \tag{5}$$

In forma matriciale possiamo scrivere:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \tag{6}$$

dove $\{x\} = \{\vartheta \quad x\}^T$ è il vettore delle coordinate libere, $\{F\} = \{0 \quad k_3 y\}^T$ il vettore delle azioni forzanti, $[M]$ la matrice d'inerzia e $[K]$ la matrice di rigidezza; queste ultime sono definite dalle espressioni seguenti:

$$[M] = \begin{bmatrix} (J_1 + Ml^2) & 0 \\ 0 & \left(m_2 + \dfrac{J_2}{r_2^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.435 & 0 \\ 0 & 1.8 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [(k_1 + k_2)r_1^2 + Mgl] & -k_2 r_1 \\ -k_2 r_1 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 284.4 & -800 \\ -800 & 10000 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Per effettuare il calcolo delle pulsazioni proprie poniamo $\{F\} = 0$ (moto libero) ed uguagliamo a zero il determinante della matrice $[\Delta] = [K] - \omega^2[M]$:

$$|[\Delta]| = |[K] - \omega^2[M]| = \begin{vmatrix} 284.4 - 0.435\,\omega^2 & -800 \\ -800 & 10000 - 1.8\,\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Sviluppando il determinante si ottiene la seguente equazione caratteristica:

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0 \tag{10}$$

in cui:

$$\begin{aligned} A &= 0.783 \\ B &= -4861.9 \\ C &= 2204145 \end{aligned} \tag{11}$$

Le pulsazioni proprie valgono:

$$\omega_1 = 22.19 \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = 75.61 \text{ rad/s} \tag{12}$$

Per il calcolo dei modi principali di vibrare, consideriamo il sistema lineare algebrico omogeneo nelle incognite Θ ed X (ampiezze di vibrazione), avente come matrice dei coefficienti la matrice $[\Delta]$:

$$\begin{cases} \left[(k_1+k_2)r_1^2 + Mgl - \omega^2(J_1+Ml^2)\right]\Theta - k_2 r_1 X = 0 \\ -k_2 r_1 \Theta + \left[(k_2+k_3) - \omega^2\left(m_2 + \dfrac{J_2}{r_2^2}\right)\right] X = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Da una qualsiasi delle due equazioni è possibile ricavare il rapporto fra le ampiezze di oscillazione; utilizzando, ad esempio, la seconda si ricava:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Theta}{X}\right)_{\omega=\omega_1} &= \frac{k_2+k_3-\omega_1^2\left(m_2+\dfrac{J_2}{r_2^2}\right)}{k_2 r_1} = 11.392 \text{ rad/m} \\ \left(\frac{\Theta}{X}\right)_{\omega=\omega_2} &= \frac{k_2+k_3-\omega_2^2\left(m_2+\dfrac{J_2}{r_2^2}\right)}{k_2 r_1} = -0.363 \text{ rad/m} \end{aligned} \tag{14}$$

Quindi:

- Primo modo ($\omega = \omega_1 = 22.19$ rad/s):

$$\Phi_1 = \left\{ \begin{array}{c} \Theta \\ X \end{array} \right\}_{\omega=\omega_1} = \left\{ \begin{array}{c} 11.392 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{15}$$

- Secondo modo ($\omega = \omega_2 = 75.61$ rad/s):

$$\Phi_2 = \left\{ \begin{array}{c} \Theta \\ X \end{array} \right\}_{\omega=\omega_2} = \left\{ \begin{array}{c} -0.363 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{16}$$

Moto forzato

Per lo studio del moto forzato riscriviamo le equazioni di moto (5), mettendo in evidenza il termine armonico $y(t)$ che eccita il sistema:

$$\begin{cases} (J_1+Ml^2)\ddot{\vartheta} + [(k_1+k_2)r_1^2 + Mgl]\vartheta - k_2 r_1 x = 0 \\ \left(m_2 + \dfrac{J_2}{r_2^2}\right)\ddot{x} - k_2 r_1 \vartheta + (k_2+k_3)x = k_3 Y \sin\Omega t \end{cases} \tag{17}$$

La soluzione a regime del sistema (17) si può esprimere nella forma:

$$\begin{cases} \vartheta(t) = \Theta \sin\Omega t \\ x(t) = X \sin\Omega t \end{cases} \tag{18}$$

in cui i simboli Θ ed X indicano ora le ampiezze di vibrazione in condizioni di regime.

Sostituendo le espressioni di $\vartheta(t)$ e $x(t)$ con le loro derivate seconde nelle equazioni di moto (17) e semplificando i termini armonici si ricava:

$$\begin{cases} \left[(k_1+k_2)r_1^2+Mgl-\Omega^2(J_1+Ml^2)\right]\Theta-k_2r_1X=0 \\ \\ -k_2r_1\Theta+\left[(k_2+k_3)-\Omega^2\left(m_2+\dfrac{J_2}{r_2^2}\right)\right]X=k_3Y \end{cases} \tag{19}$$

Con i dati del problema si ottiene:

$$\begin{cases} -1281.6\ \Theta-800\ X=0 \\ \\ -800\ \Theta+3520\ X=300 \end{cases} \tag{20}$$

da cui:

$$\begin{cases} \Theta=0.0466\ \text{rad}=-2.67^\circ \\ \\ X=0.0746\ \text{m}=74.6\ \text{mm} \end{cases} \tag{21}$$

Esercizio 8 - Cod. VIB-032

Il sistema rappresentato in Figura 1 risulta costituito dai seguenti elementi:

- un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $2a$;
- un manovellismo a croce che imprime un movimento armonico $y(t) = Y \sin \Omega t$ in direzione orizzontale al baricentro G dell'asta;
- un rullo di massa M, raggio R e momento d'inerzia baricentrico J, che rotola senza strisciare su un piano orizzontale;
- due molle di rigidezza k disposte come in figura.

Supponendo che, per $y = 0$ e rullo fermo, l'asta AB sia in posizione verticale e le due molle siano scariche, si chiede di determinare:

1. le equazioni di moto del sistema nell'ipotesi che l'asta AB compia piccole oscillazioni nell'intorno della posizione verticale;
2. le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
3. l'ampiezza delle oscillazioni dell'asta AB e del rullo in condizioni di regime.

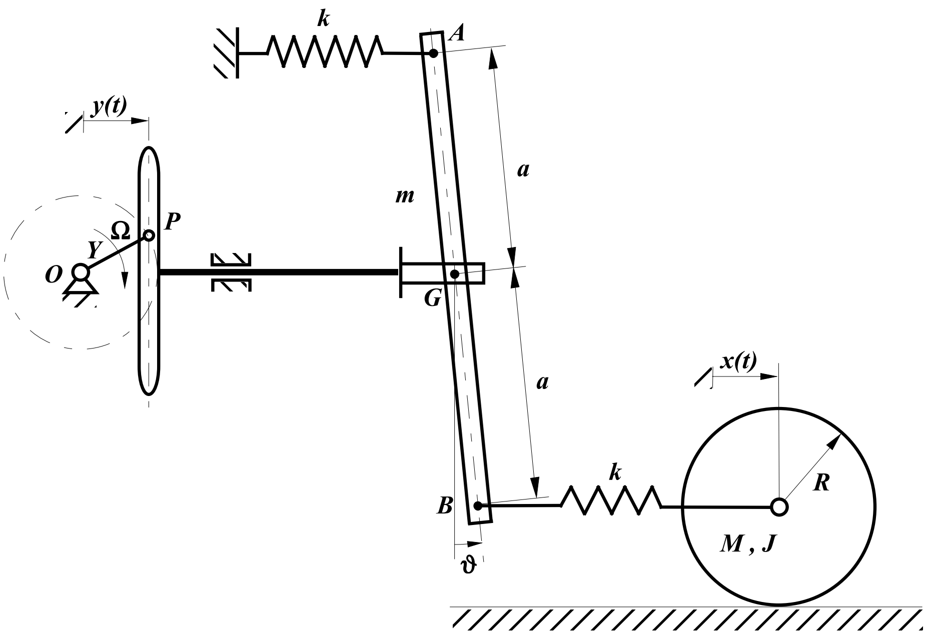


Figura 1

Nota. Il momento d'inerzia baricentrico di un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2a$ vale:

$$J_{asta} = \frac{1}{3} m a^2$$

Dati

- Massa dell'asta AB .... $m = 2$ kg
- Semi lunghezza dell'asta AB .... $a = 0.45$ m
- Massa del rullo .... $M = 5$ kg
- Raggio del rullo .... $R = 0.15$ m
- Momento d'inerzia baricentrico del rullo .... $J = 0.06$ kgm^2
- Rigidezza delle molle .... $k = 30000$ N/m
- Lunghezza della manovella OP .... $Y = 0.08$ m
- Velocità angolare della manovella OP .... $\Omega = 90$ rad/s

Soluzione

Il problema presenta due gradi di libertà e può quindi essere facilmente risolto mediante le equazioni di Lagrange; indicando con ϑ la rotazione del'asta attorno al punto G e con x lo spostamento del centro del rullo, si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta} + \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

L'energia cinetica del sistema risulta:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + \frac{a^2}{3}\dot{\vartheta}^2\right) + \frac{1}{2}\left(M + \frac{J}{R^2}\right)\dot{x}^2 \tag{2}$$

Per il calcolo dell'energia potenziale occorre valutare correttamente la deformazione delle due molle; con le convenzioni assunte e ritenendo valida l'ipotesi di piccole oscillazioni dell'asta AB nell'intorno della posizione verticale, la molla superiore subisce un allungamento y per effetto dello spostamento verso destra del punto G ed un accorciamento $a\vartheta$ per effetto della rotazione antioraria ϑ * dell'asta AB; la deformazione complessiva risulta pertanto pari a $y - a\vartheta$; ragionando in modo analogo si può osservare che la molla inferiore subisce una deformazione pari a $x - (y + a\vartheta)$.
L'energia potenziale del sistema assume quindi la seguente espressione:

$$V = \frac{1}{2}k\left[x - (y + a\vartheta)\right]^2 + \frac{1}{2}k(y - a\vartheta)^2 \tag{3}$$

Il calcolo delle derivate parziali che costituiscono i singoli termini delle equazioni di Lagrange fornisce i seguenti risultati:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = \dfrac{1}{3}ma^2\ddot{\vartheta} & \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0 & \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta} = 2ka^2\vartheta - kax \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \left(M + \dfrac{J}{R^2}\right)\ddot{x} & \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial V}{\partial x} = k(x - y - a\vartheta) \end{array} \tag{4}$$

Sostituendo nelle equazioni di Lagrange le relazioni (4) e riordinando i termini si ottengono le equazioni di moto sotto riportate:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}ma^2\ddot{\vartheta} + 2ka^2\vartheta - kax = 0 \\ \left(M + \dfrac{J}{R^2}\right)\ddot{x} - ka\vartheta + kx = ky \end{cases} \tag{5}$$

In forma matriciale il sistema (5) assume la forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \tag{6}$$

dove $\{x\} = \{\vartheta \quad x\}^T$ è il vettore delle coordinate libere, $\{F\} = \{0 \quad ky\}^T$ il vettore delle azioni forzanti, $[M]$ la matrice d'inerzia e $[K]$ la matrice di rigidezza; queste ultime sono definite dalle espressioni seguenti:

$$[M] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & \left(M + \dfrac{J}{R^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.135 & 0 \\ 0 & 7.667 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2ka^2 & -ka \\ -ka & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12150 & -13500 \\ -13500 & 30000 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Per effettuare il calcolo delle pulsazioni proprie poniamo (moto libero) ed uguagliamo a zero il determinante della matrice $[\Delta] = [K] - \omega^2[M]$; con semplici passaggi si ottiene:

$$|[\Delta]| = |[K] - \omega^2[M]| = \begin{vmatrix} 2ka^2 - \omega^2\dfrac{1}{3}ma^2 & -ka \\ -ka & k - \omega^2\left(M + \dfrac{J}{R^2}\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Sviluppando il determinante si ottiene la seguente equazione caratteristica:

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0 \tag{10}$$

in cui:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3}ma^2\left(M + \frac{J}{R^2}\right) = 1.035 \\ B &= -ka^2\left[m + 2\left(M + \frac{J}{R^2}\right)\right] = -97200 \\ C &= k^2a^2 = 1.8225 \times 10^8 \end{aligned} \tag{11}$$

Le pulsazioni proprie valgono:

$$\omega_1 = 43.7 \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = 303.3 \text{ rad/s} \tag{12}$$

Il calcolo dei modi principali di vibrare si effettua, come di consueto, considerando il sistema lineare omogeneo avente come incognite le ampiezze di oscillazione Θ ed X e come matrice dei coefficienti la matrice $[\Delta]$.

$$\begin{cases} \left(2ka^2 - \omega^2\frac{1}{3}ma^2\right)\Theta - kaX = 0 \\ -ka\Theta + \left[k - \omega^2\left(M + \frac{J}{R^2}\right)\right]X = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Da una qualsiasi delle due equazioni è possibile ricavare il rapporto fra le ampiezze di oscillazione; utilizzando, ad esempio, la seconda equazione si ha:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Theta}{X}\right)_{\omega=\omega_1} &= \frac{k - \omega_1^2\left(M + \frac{J}{R^2}\right)}{ka} = 1.135 \text{ rad/m} \\ \left(\frac{\Theta}{X}\right)_{\omega=\omega_2} &= \frac{k - \omega_2^2\left(M + \frac{J}{R^2}\right)}{ka} = -50.024 \text{ rad/m} \end{aligned} \tag{14}$$

Quindi:

- Primo modo ($\omega = \omega_1 = 43.7$ rad/s):

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} \Theta \\ X \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_1} = \begin{Bmatrix} 1.135 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

- Secondo modo ($\omega = \omega_2 = 303.3$ rad/s):

$$\Phi_2 = \begin{Bmatrix} \Theta \\ X \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_2} = \begin{Bmatrix} -50.024 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

Moto forzato

Il calcolo delle ampiezze di oscillazione in condizioni di regime sinusoidale permanente si effettua considerando nelle equazioni di moto il contributo della forzante armonica; riscriviamo pertanto il sistema (5) mettendo in evidenza tale contributo:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}ma^2\ddot{\vartheta} + 2ka^2\vartheta - kax = 0 \\ \left(M + \frac{J}{R^2}\right)\ddot{x} - ka\vartheta + kx = kY\sin\Omega t \end{cases} \tag{17}$$

La soluzione a regime di tale sistema si può esprimere nella forma:

$$\begin{cases} \vartheta(t) = \Theta\sin\Omega t \\ x(t) = X\sin\Omega t \end{cases} \tag{18}$$

in cui i simboli Θ ed X indicano ora le ampiezze di vibrazione in condizioni di regime.
Sostituendo le espressioni di $\vartheta(t)$ e $x(t)$ con le loro derivate seconde nelle equazioni di moto (17) e semplificando i termini armonici si ricava:

$$\begin{cases} \left(2ka^2 - \Omega^2 \dfrac{1}{3} ma^2\right) \Theta - kaX = 0 \\ \\ -ka\Theta + \left[k - \Omega^2 \left(M + \dfrac{J}{R^2}\right)\right] X = kY \end{cases} \tag{19}$$

Con i dati assegnati si ottiene:

$$\begin{cases} 11056.5\ \Theta - 13500\ X = 0 \\ \\ -13500\ \Theta - 32100\ X = 2400 \end{cases} \tag{20}$$

da cui:

$$\begin{cases} \Theta = -0.0603 \text{ rad} = -3.45^\circ \\ \\ X = -0.0494 \text{ m} = -49.4 \text{ mm} \end{cases} \tag{21}$$

Esercizio 9 - Cod. VIB-038

Un gruppo motore-generatore è stato progettato per funzionare nel campo di velocità compreso fra i 2000 e i 4000 giri/min; si nota però che il sistema vibra violentemente alla velocità di 3000 giri/min, a causa di una imperfetta equilibratura del rotore.
Per eliminare il problema si propone di montare un assorbitore dinamico, costituito da una trave a mensola con massa concentrata.
Come primo tentativo, si applica al gruppo motore-generatore una trave a mensola, dotata di una massa di prova di 2 kg, sintonizzata a 3000 giri/min: le frequenze proprie risultanti del sistema sono di 2500 e 3600 giri/min;
Sulla base di questi dati, si chiede di progettare l'assorbitore dinamico da applicare al gruppo motore-generatore (specificando la sua massa e la sua rigidezza) in modo che le frequenze naturali del sistema complessivo cadano all'esterno del campo di velocità operative del sistema.

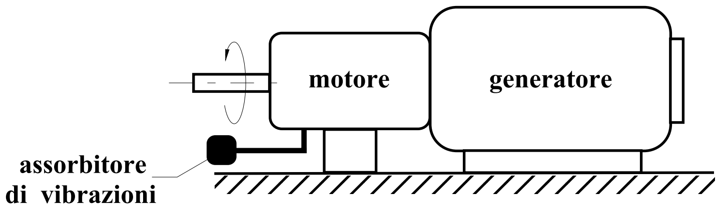


Figura 1

Soluzione

Consideriamo il gruppo motore-generatore e l'assorbitore dinamico di vibrazioni come due sistemi separati ad un solo grado di libertà; indicando con il pedice "1" i parametri del gruppo motore-generatore e con il pedice "2" i corrispondenti parametri dell'assorbitore, le pulsazioni proprie risultano:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \tag{1}$$

Per calcolare le pulsazioni proprie Ω_1 e Ω_2 del sistema complessivo a due gradi di libertà (risultante dall'abbinamento del gruppo motore-generatore con l'assorbitore dinamico) occorre invece utilizzare le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega_1}{\omega_2}\right)^2 &= \frac{[1+(1+\mu)\lambda^2] - \sqrt{[1+(1+\mu)\lambda^2]^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda^2} \\ \left(\frac{\Omega_1}{\omega_2}\right)^2 &= \frac{[1+(1+\mu)\lambda^2] + \sqrt{[1+(1+\mu)\lambda^2]^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda^2} \end{aligned} \tag{2}$$

dove si è posto $\mu = m_2/m_1$ e $\lambda = \omega_2/\omega_1$.
L'assorbitore di prova che viene applicato al sistema è sintonizzato per una velocità $n = 3000$ giri/min; trasformando tale valore in rad/s si ottiene:

$$\Omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \times 3000}{60} = 314.16 \text{ rad/s} \tag{3}$$

La condizione di sintonizzazione è la seguente:

$$\omega_1 = \omega_2 = \Omega \tag{4}$$

Posto ora $r_1 = \Omega_1/\omega_2$ e $r_2 = \Omega_2/\omega_2$ e tenendo presente che, per la (4), risulta $\lambda = 1$, possiamo riscrivere le relazioni (2) nella forma sotto riportata:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{2+\mu-\sqrt{(2+\mu)^2-4}}{2} = 1+\frac{\mu}{2}-\sqrt{\left(1+\frac{\mu}{2}\right)^2-1} \\ r_2^2 &= \frac{2+\mu+\sqrt{(2+\mu)^2-4}}{2} = 1+\frac{\mu}{2}+\sqrt{\left(1+\frac{\mu}{2}\right)^2-1} \end{aligned} \tag{5}$$

I valori di Ω_1 e Ω_2 sono noti, in quanto corrispondono alle velocità $n_1 = 2500$ giri/min ed $n_2 = 3600$ giri/min assegnate dal testo; si ha pertanto:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{2\pi \times 2500}{60} = 261.8\,\text{rad/s} \qquad \Omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{2\pi \times 3600}{60} = 377\,\text{rad/s} \tag{6}$$

È ora possibile calcolare i valori dei rapporti r_1 ed r_2:

$$r_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_2} = \frac{261.8}{314.16} = 0.8333 \qquad r_2 = \frac{\Omega_2}{\omega_2} = \frac{377}{314.16} = 1.2 \tag{7}$$

A questo punto, essendo noto r_1, possiamo ricavare il valore del rapporto μ fra le masse dalla prima delle (5): con semplici passaggi si ottiene[2]:

$$\mu = \frac{r_1^4+1}{r_1^2} - 2 = \frac{0.8333^4+1}{0.8333^2} - 2 = 0.1344 \tag{8}$$

Ricordando ora la definizione di μ e tenendo presente che la massa dell'assorbitore vale $m_2 = 2$ kg è possibile ricavare il valore della massa m_1 del gruppo motore-generatore:

$$m_1 = \frac{m_2}{\mu} = \frac{2}{0.1344} = 14.88\ \text{kg} \tag{9}$$

Siamo ora in grado di progettare nuovamente l'assorbitore in modo che le pulsazioni proprie del sistema complessivo cadano all'esterno del campo di velocità operative del sistema ($2000 \div 4000$ giri/min).
Se fissiamo la prima pulsazione propria in corrispondenza della velocità $n_1 = 1900$ giri/min (che risulta minore di 2000 giri/min) otteniamo:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{2\pi \times 1900}{60} = 198.97\,\text{rad/s} \tag{10}$$

$$r_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_2} = \frac{198.97}{314.16} = 0.6333 \tag{11}$$

Con il valore di r_1 fornito dalla (11) si ottiene per μ il valore:

$$\mu = \frac{r_1^4+1}{r_1^2} - 2 = \frac{0.6333^4+1}{0.6333^2} - 2 = 0.8942 \tag{12}$$

La massa m_2 dell'assorbitore dovrà quindi essere pari a:

$$m_2 = \mu\, m_1 = 0.8942 \times 14.88 = 13.3\ \text{kg} \tag{13}$$

Essendo ora noto μ, è possibile calcolare il valore di r_2, corrispondente alla seconda pulsazione propria del sistema; si ha infatti:

$$r_2 = \sqrt{1+\frac{\mu}{2}+\sqrt{\left(1+\frac{\mu}{2}\right)^2-1}} = \sqrt{1+\frac{0.8942}{2}+\sqrt{\left(1+\frac{0.8942}{2}\right)^2-1}} = 1.58 \tag{14}$$

[2] In alternativa, essendo noto anche il valore di r_2, si può utilizzare la seconda delle (5) per calcolare il rapporto μ; il risultato che si ottiene è il medesimo; infatti:

$$\mu = \frac{r_2^4+1}{r_2^2} - 2 = \frac{1.2^4+1}{1.2^2} - 2 = 0.1344$$

$$\Omega_2 = r_2\omega_2 = 1.58 \times 314.16 = 496 \text{ rad/s} \tag{15}$$

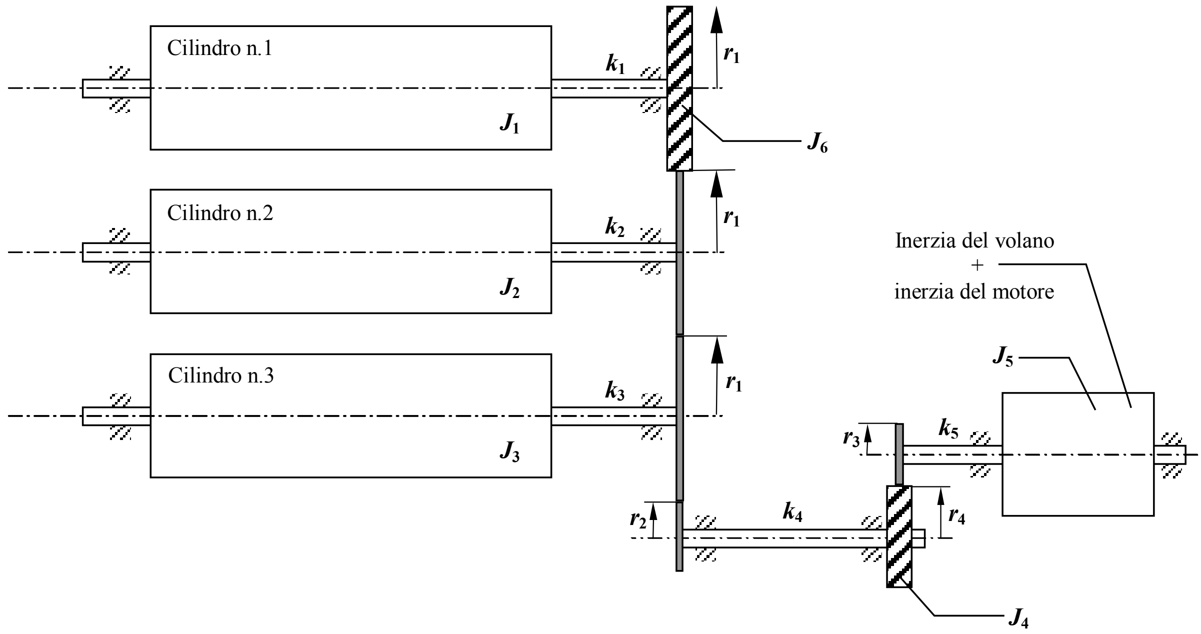
$$n_2 = \frac{60\Omega_2}{2\pi} = \frac{30}{\pi} \times 496 = 4737 \text{ giri/min} \tag{16}$$

Essendo $n_2 > 4000$ giri/min, risultano soddisfatte le specifiche di progetto.
La rigidezza k_2 della molla dell'assorbitore (trave a mensola) si calcola con la relazione:

$$k_2 = m_2\omega_2^2 = 13.3 \times 314.16^2 = 1.31 \times 10^6 \text{ N/m} \tag{17}$$

Esercizi proposti

Esercizio 10 - Cod. VIB-053



Si calcolino le frequenze proprie ed i modi principali di vibrare relativi alle vibrazioni torsionali della macchina da stampa offset rappresentata in figura.
Si schematizzino gli alberi come molle torsionali prive di massa ed i cilindri come corpi rigidi privi di contatto reciproco.

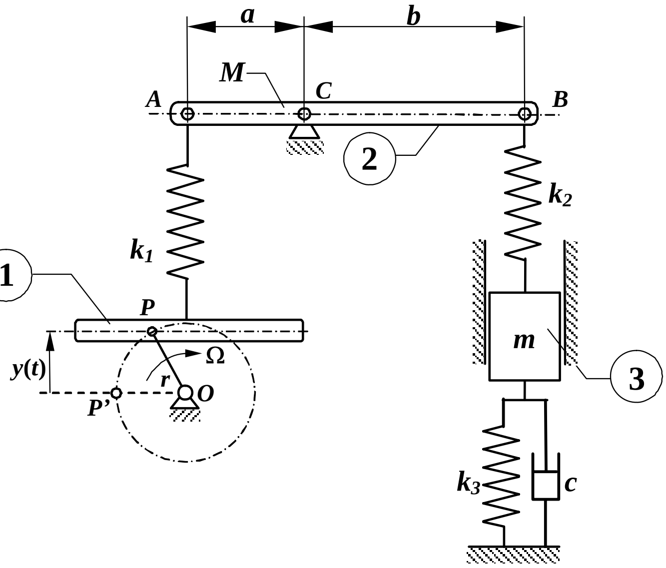
Dati

- Momenti d'inerzia .... $J_1 = J_2 = J_3 = 2.6\ \mathrm{kg\,m^2}$
- .... $J_4 = 0.5\ \mathrm{kg\,m^2}$
- .... $J_5 = 1.8\ \mathrm{kg\,m^2}$
- .... $J_6 = 1.1\ \mathrm{kg\,m^2}$

- Rapporti di trasmissione .... $r_4/r_3 = 5$
- .... $r_1/r_2 = 2$

- Rigidezza torsionale degli alberi .... $k_1 = k_3 = 8.4 \times 10^5$ Nm
- .... $k_2 = 6.3 \times 10^5$ Nm
- .... $k_4 = 2.5 \times 10^5$ Nm
- .... $k_5 = 4.6 \times 10^5$ Nm

Esercizio 11 - Cod. VIB-054



Il sistema vibrante rappresentato in figura è costituito dai seguenti elementi:

- un manovellismo a croce (1), la cui manovella ruota con velocità angolare costante Ω;
- un bilanciere (2) realizzato mediante un'asta omogenea di massa M;
- una massa traslante (3) scorrevole senza attrito nella guida verticale;
- tre molle di costante elastica k_1, k_2 e k_3 rispettivamente;
- uno smorzatore viscoso avente costante di smorzamento pari a c.

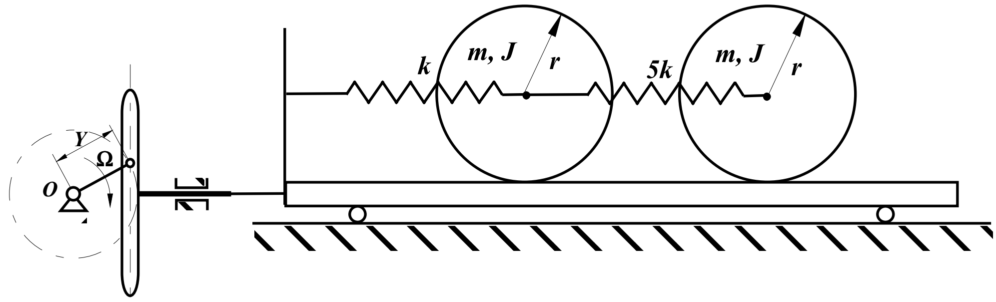
Nell'ipotesi che il bilanciere compia piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio (orizzontale) si chiede di:

1. scrivere le equazioni differenziali di moto per il sistema in esame;
2. calcolare le leggi di moto del bilanciere e della massa traslante in condizioni di regime.

Dati

- Massa traslante: .... $m = 6$ kg
- Massa del bilanciere: .... $M = 8$ kg
- Costante di smorzamento: .... $c = 20$ Ns/m
- Raggio della manovella: .... $r = 50$ mm
- Velocità angolare della manovella: .... $\Omega = 25$ rad/s
- Rigidezza delle molle: .... $k_1 = 4000$ N/m, $k_2 = 2000$ N/m, $k_3 = 1500$ N/m
- Distanza dei punti A e B dal perno C: .... $a = 150$ mm, $b = 250$ mm

Esercizio 12 - Cod. VIB-056



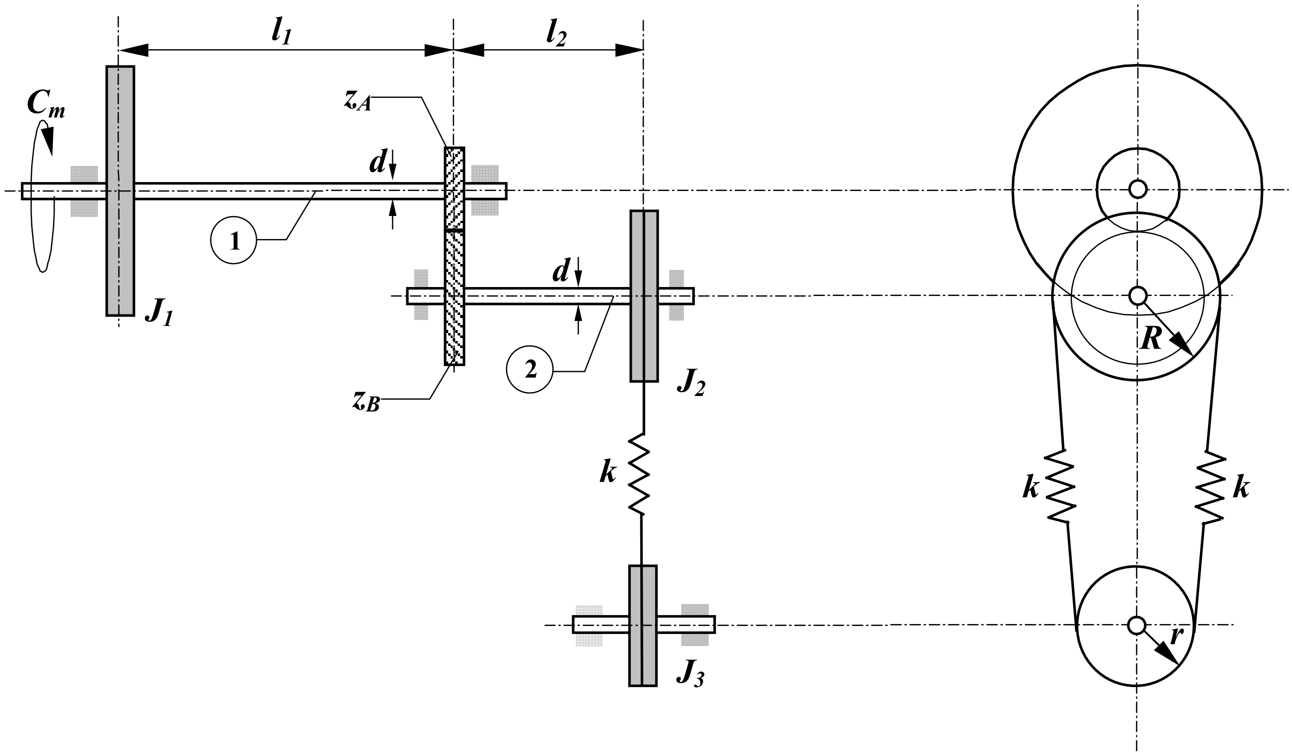
Per il sistema in figura, nell'ipotesi che i dischi rotolino senza strisciare sul carrello, si chiede di:

1. calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
2. calcolare le ampiezze di vibrazione a regime, quando la manovella ruota con velocità angolare Ω costante.

Dati

- Massa dei dischi .... $m = 10$ kg
- Momento d'inerzia baricentrico dei dischi .... $J = 0.05\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Costante elastica .... $k = 1000$ N/m
- Lunghezza della manovella .... $Y = 80$ mm
- Raggio dei dischi .... $r = 100$ mm
- Velocità angolare della manovella .... $\Omega = 40$ rad/s

Esercizio 13 - Cod. VIB-057



Si consideri la trasmissione meccanica rappresentata in figura; nell'ipotesi che la cinghia di trasmissione e gli alberi (1) e (2) abbiano comportamento elastico, si chiede di:

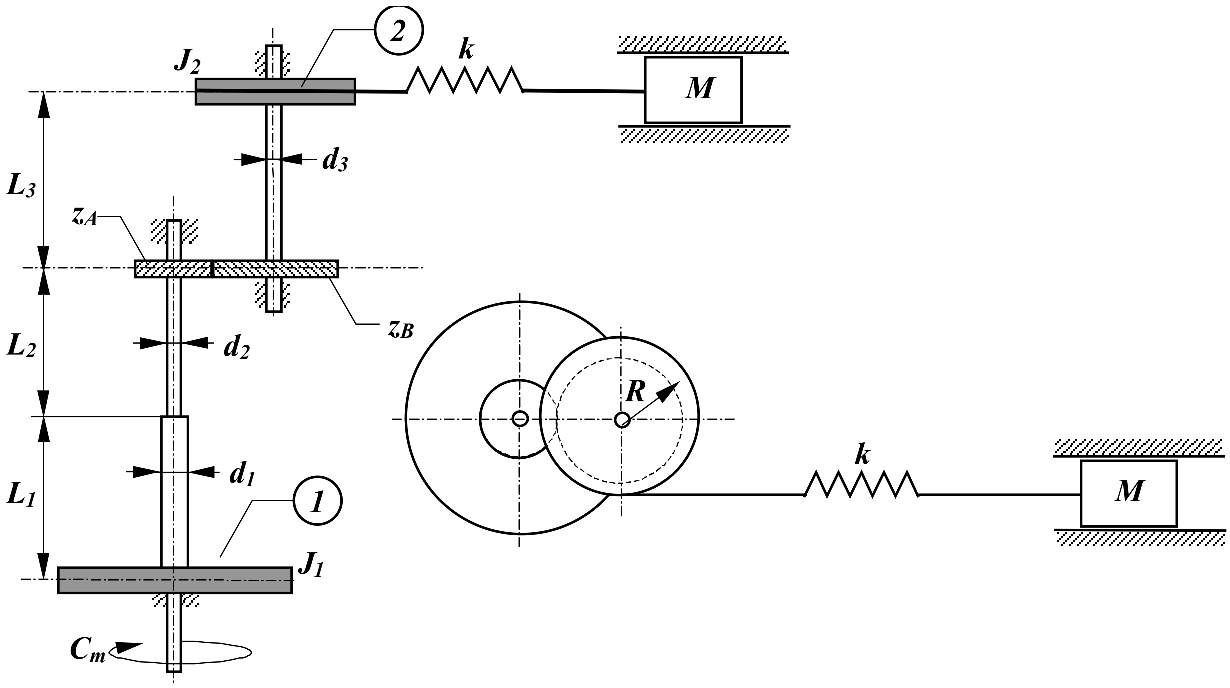
1. scrivere le equazioni di moto del sistema;
2. calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
3. determinare l'ampiezza delle vibrazioni dei tre dischi in condizioni di regime quando al sistema viene applicata una coppia variabile nel tempo con legge sinusoidale $C_m = C_0 \sin \Omega t$.

Nota. Si consideri trascurabile l'inerzia delle due ruote dentate.

Dati

- Momenti d'inerzia dei dischi .... $J_1 = 5\ \mathrm{kg\,m^2}$ $\quad J_2 = 3\ \mathrm{kg\,m^2}$ $\quad J_3 = 2\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Numero di denti delle ruote dentate .... $z_A = 20$ $\quad z_B = 60$
- Modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio .... $G = 80\ \mathrm{kN/mm^2}$
- Lunghezze degli alberi .... $l_1 = 1$ m $\quad l_2 = 0.5$ m
- Diametro degli alberi .... $d = 40$ mm
- Raggi delle pulegge .... $R = 100$ mm $\quad r = 80$ mm
- Costante elastica della cinghia .... $k = 3 \times 10^5$ N/m
- Dati relativi alla forzante .... $C_0 = 80$ Nm $\quad \Omega = 20$ rad/s

Esercizio 14 - Cod. VIB-063



Il sistema rappresentato in figura è costituito dai componenti sotto elencati:

- due dischi aventi momento d'inerzia J_1 e J_2;
- due alberi di acciaio montati su cuscinetti;
- una coppia di ruote dentate che permettono la trasmissione del moto fra i due alberi;
- un elemento elastico di rigidezza k;
- una massa M collegata all'elemento elastico e scorrevole senza attrito lungo una guida orizzontale.

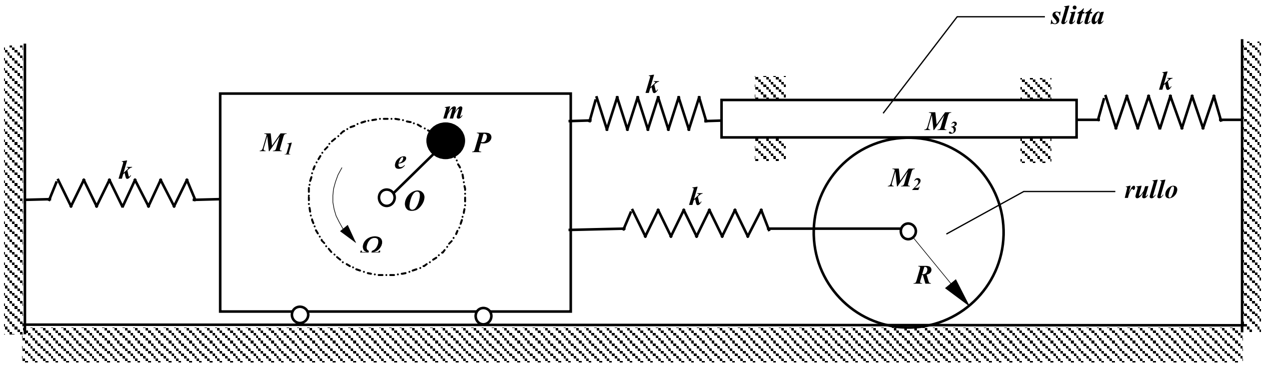
Nell'ipotesi che risultino trascurabili le masse degli alberi ed il momento d'inerzia delle ruote dentate, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto;
2. calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
3. calcolare l'ampiezza delle vibrazioni a regime quando al disco (1) viene applicata una coppia motrice C_m variabile nel tempo con legge armonica $C_m = C_{max} \sin \Omega t$.

Dati

- Momenti d'inerzia dei dischi .... $J_1 = 5 \mathrm{kg\,m^2}$ $\quad J_2 = 2\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Massa del corpo traslante .... $M = 10$ kg
- Costante elastica .... $k = 10000$ N/m
- Raggio del disco (2) .... $R = 150$ mm
- Numero di denti delle ruote dentate .... $z_A = 20$ $\quad z_B = 60$
- Modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio .... $G = 80\ \mathrm{kN/mm^2}$
- Lunghezze degli alberi .... $L_1 = 300$ mm $\quad L_2 = 250$ mm $\quad L_3 = 200$ mm
- Diametri degli alberi .... $d_1 = 30$ mm $\quad d_2 = 20$ mm $\quad d_3 = 15$ mm
- Dati relativi alla forzante .... $C_{max} = 100$ Nm $\quad \Omega = 25$ rad/s

Esercizio 15 - Cod. VIB-066



Per il sistema rappresentato in figura, nell'ipotesi che non vi sia strisciamento fra il rullo ed il terreno e fra il rullo e la slitta, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto;
2. calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
3. determinare l'ampiezza delle vibrazioni in condizioni di regime, quando l'asta OP ruota a velocità angolare Ω costante.

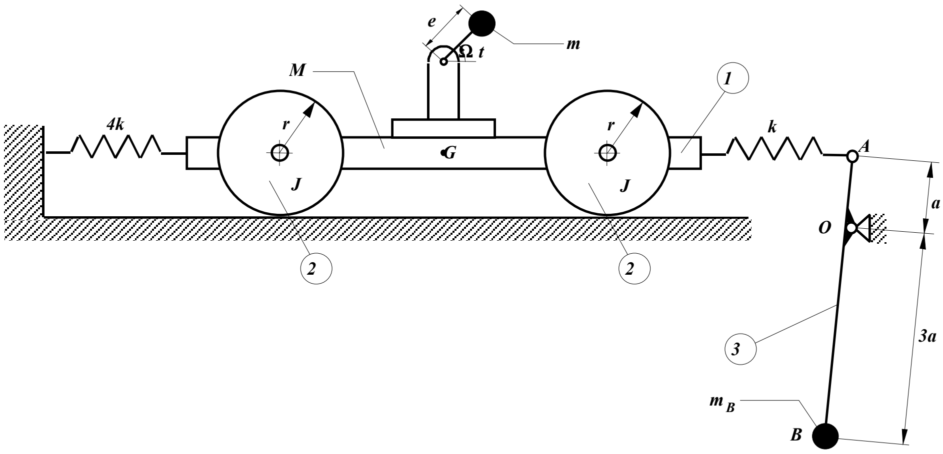
Nota. Si ricordi che, per il rullo omogeneo di massa M_2 e raggio R, il momento d'inerzia baricentrico vale:

$$J = \frac{M_2 R^2}{2}$$

Dati

- Massa del corpo su cui è montato il rotore eccentrico .... $M_1 = 50$ kg
- Massa del rullo .... $M_2 = 15$ kg
- Massa della slitta .... $M_3 = 10$ kg
- Massa eccentrica .... $m = 4$ kg
- Eccentricità .... $e = 25$ mm
- Raggio del rullo .... $R = 200$ mm
- Rigidezza delle molle .... $k = 2000$ N/m
- Velocità angolare dell'asta OP .... $\Omega = 20$ rad/s

Esercizio 16 - Cod. VIB-068



Il sistema rappresentato in figura giace in un piano verticale ed è costituito da un carrello (1) di massa M, dotato di due ruote (2) aventi entrambe raggio r e momento d'inerzia baricentrico pari a J.
Sul carrello è montata una massa m avente eccentricità e rispetto al perno di rotazione.
Il carrello è collegato a terra tramite una molla di rigidezza $4k$, disposta come in figura; un'altra molla, di rigidezza k, collega il carrello ad un'asta (3) di massa trascurabile, incernierata in O, sulla cui estremità inferiore è fissata una massa di valore pari ad m_B.

Domande

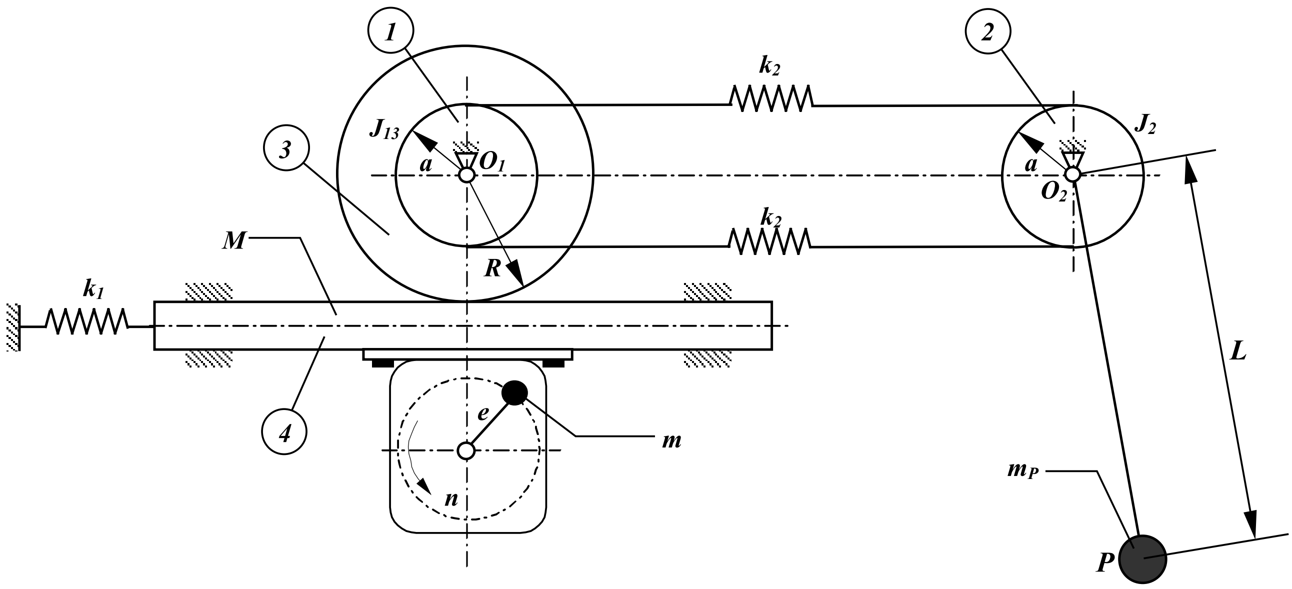
1. Scrivere le equazioni di moto per il sistema in esame nei due casi seguenti:
   a) rotore fermo (bloccato sul proprio perno in modo da risultare solidale con il carrello);
   b) rotore azionato a velocità angolare costante Ω.
2. Nell'ipotesi che il rotore sia bloccato sul proprio perno calcolare:
   a) le pulsazioni proprie del sistema;
   b) i modi principali di vibrare;
   c) la legge di movimento del sistema quando vengono assegnate le seguenti condizioni iniziali:
      - carrello spostato di $x_0 = 5$ mm verso destra rispetto alla sua posizione di equilibrio statico;
      - asta (3) verticale;
      - velocità nulle.
3. Nel caso di funzionamento a regime (rotore azionato a velocità angolare costante Ω) determinare:
   a) l'ampiezza delle vibrazioni orizzontali del carrello;
   b) l'ampiezza delle oscillazioni angolari dell'asta (3).

Nota. Per la scrittura delle equazioni di moto si ritengano valide le seguenti ipotesi:
- assenza di strisciamento fra ruote e terreno;
- piccole oscillazioni dell'asta (3).

Dati

- Massa del carrello (ruote comprese) .... $M = 20$ kg
- Momento d'inerzia delle ruote .... $J = 0.05$ kg m^2
- Massa eccentrica .... $m = 3$ kg
- Massa fissata all'estremità B dell'asta .... $m_B = 2$ kg
- Costante elastica .... $k = 800$ N/m
- Eccentricità .... $e = 30$ mm
- Raggio delle ruote .... $r = 180$ mm
- Lunghezza dei due bracci dell'asta .... OA = a = 100 mm OB = 3a = 300 mm
- Velocità angolare della massa eccentrica .... $\Omega = 10$ rad/s

Esercizio 17 - Cod. VIB-070



La slitta (4) scorre in direzione orizzontale ed è vincolata a terra mediante una molla di rigidezza k_1.
Nella parte inferiore della slitta è montata una massa eccentrica rotante a velocità angolare costante; nella parte superiore la slitta è dotata di una cremagliera che permette la trasmissione del moto alla ruota dentata (3), di massa trascurabile e solidale con la puleggia (1); quest'ultima trasmette il movimento alla puleggia (2) mediante una cinghia elastica i cui rami hanno rigidezza pari a k_2.
L'asta O_2P, di massa trascurabile e lunghezza L, è solidale con la puleggia (2) e porta all'estremità inferiore una massa m_P.
Nell'ipotesi che il pendolo compia piccole oscillazioni nell'intorno della posizione verticale si chiede di:

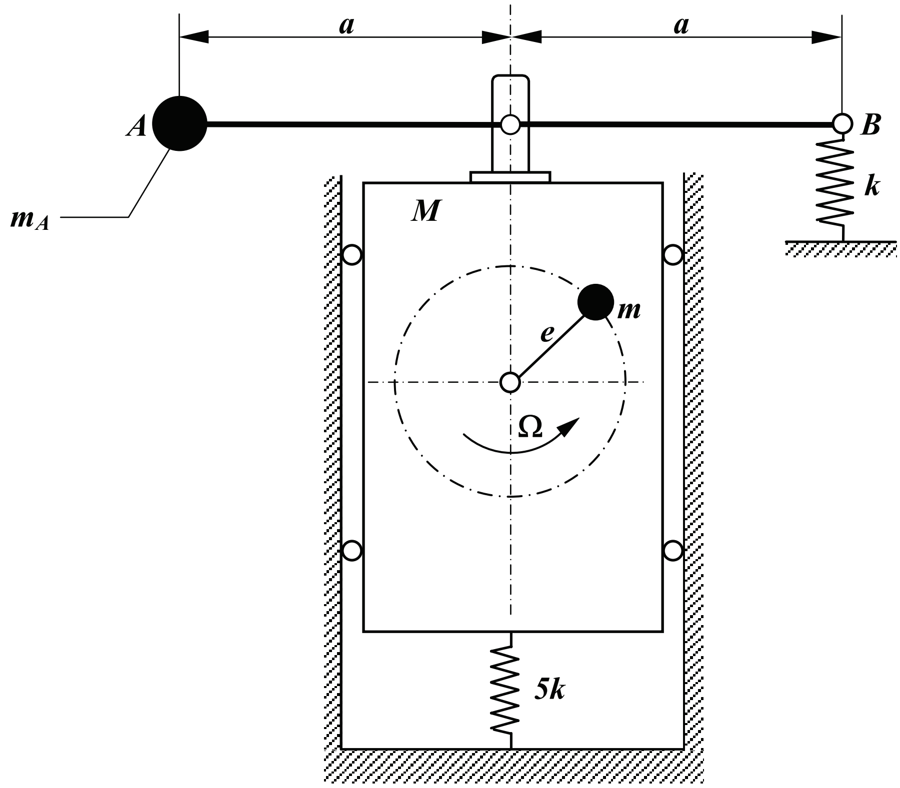
1. scrivere le equazioni di moto del sistema;
2. calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
3. calcolare l'ampiezza delle vibrazioni del pendolo e della slitta in condizioni di regime.

Nota. Si assuma che tutte le molle siano scariche quando l'asta O_2P è in posizione verticale e che tutti gli attriti siano trascurabili.

Dati

- Massa della slitta (esclusa la massa eccentrica) .... $M = 20$ kg
- Momento d'inerzia totale della puleggia (1) e della ruota dentata (3) .... $J_{13} = 0.08\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Momento d'inerzia della puleggia (2) .... $J_2 = 0.02\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Massa eccentrica .... $m = 3$ kg
- Massa del pendolo .... $m_P = 6$ kg
- Eccentricità .... $e = 40$ mm
- Raggio primitivo della ruota dentata .... $R = 120$ mm
- Raggio delle pulegge .... $a = 90$ mm
- Lunghezza dell'asta O_2P .... $L = 200$ mm
- Rigidezza delle molle .... $k_1 = 3000$ N/m $k_2 = 6000$ N/m
- Velocità angolare del rotore .... 300 giri/min

Esercizio 18 - Cod. VIB-072



Per il sistema vibrante rappresentato in figura, nell'ipotesi che l'asta AB (di massa trascurabile) compia piccole oscillazioni attorno alla posizione orizzontale, si chiede di:

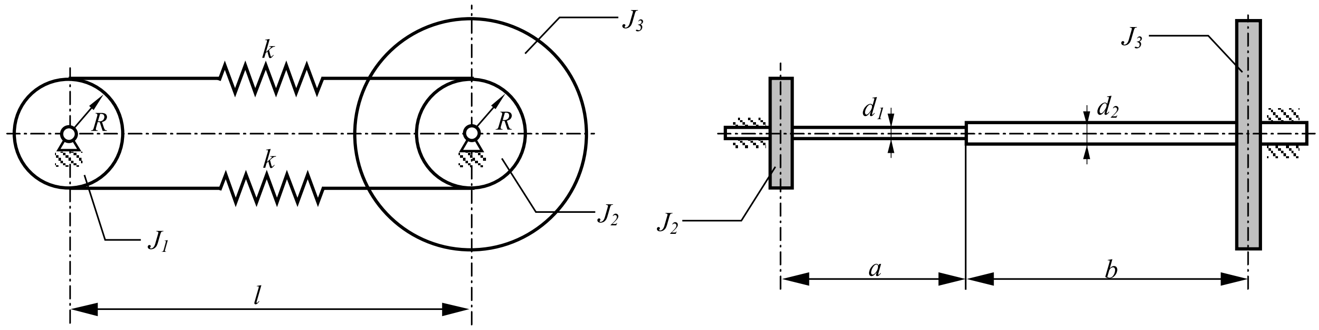
1. scrivere le equazioni di moto;
2. calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
3. calcolare l'ampiezza delle vibrazioni a regime supponendo che il rotore eccentrico ruoti a velocità angolare costante.

Nota. Per semplicità si supponga che l'asta AB sia in equilibrio in posizione orizzontale.

Dati

- Massa del corpo traslante .... $M = 60$ kg
- Massa eccentrica .... $m = 4$ kg
- Massa applicata all'estremità A dell'asta .... $m_A = 8$ kg
- Costante elastica .... $k = 10000$ N/m
- Lunghezza di ciascun braccio dell'asta AB .... $a = 0.5$ m
- Eccentricità del rotore .... $e = 50$ mm
- Velocità angolare del rotore .... $n = 500$ giri/min

Esercizio 19 - Cod. VIB-081



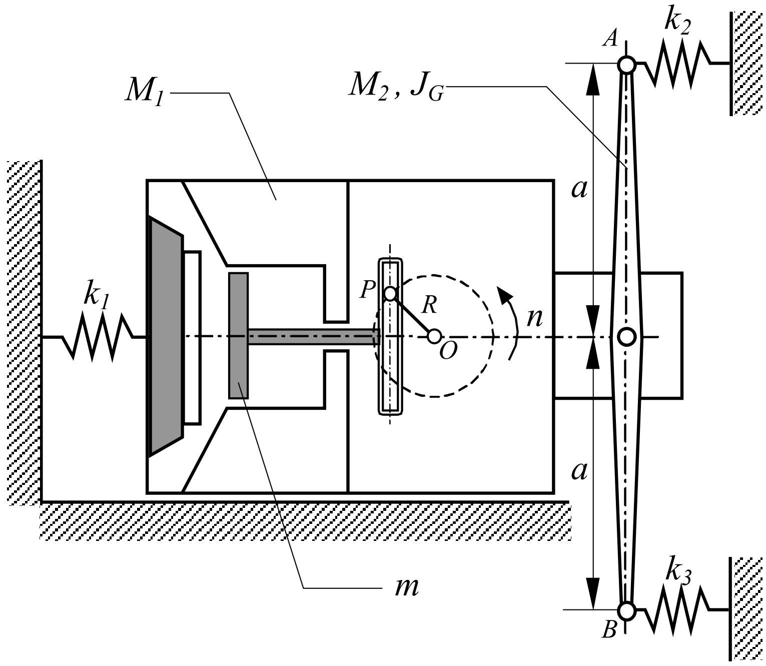
Determinare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare della trasmissione meccanica indicata in figura, considerando nei calcoli la rigidezza torsionale dell'albero e la deformabilità della cinghia.
Si tenga presente che le pulegge (1) e (2), pur essendo geometricamente identiche, sono realizzate in materiali diversi e pertanto il loro momento d'inerzia assume valori differenti.

Dati

- Momento di'inerzia della puleggia (1) .... $J_1 = 0.005\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Momento di'inerzia della puleggia (2) .... $J_2 = 0.008\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Momento di'inerzia del disco (3) .... $J_3 = 0.02\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Raggio delle pulegge .... $R = 50$ mm
- Modulo di Young del materiale costituente la cinghia .... $E = 7.5\ \mathrm{kN/mm^2}$
- Area della sezione trasversale della cinghia .... $A = 400\ \mathrm{mm^2}$
- Lunghezza di ciascun ramo della cinghia .... $l = 800$ mm
- Modulo di elasticità tangenziale del materiale costituente l'albero (acciaio) .... $G = 80\ \mathrm{kN/mm^2}$
- Lunghezza dei due tratti di albero .... $a = 400$ mm $\quad b = 600$ mm
- Diametri dei due tratti di albero .... $d_1 = 20$ mm $\quad d_2 = 30$ mm

Nota. Si osservi che i rami della cinghia sono stati schematizzati mediante due molle di rigidezza k, calcolabile mediante i dati assegnati.

Esercizio 20 - Cod. VIB-082



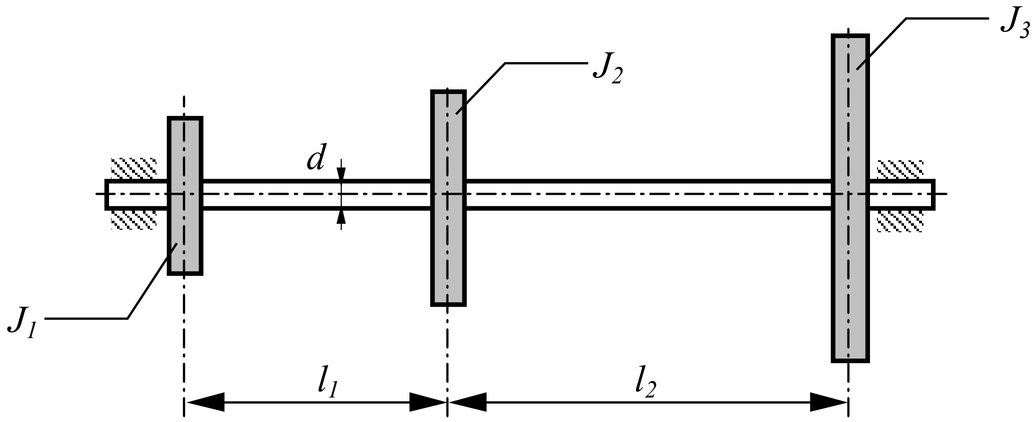
Per il sistema vibrante rappresentato in figura, nell'ipotesi che l'asta AB compia piccole oscillazioni attorno alla posizione verticale, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto;
2. calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
3. calcolare l'ampiezza delle vibrazioni a regime supponendo che la manovella OP ruoti a velocità angolare costante.

Dati

- Massa della macchina .... $M_1 = 150$ kg
- Massa in moto alternativo .... $m = 15$ kg
- Massa dell'asta AB .... $M_2 = 30$ kg
- Momento d'inerzia baricentrico dell'asta AB .... $J_G = 2\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Rigidezze delle molle .... $k_1 = 8000$ N/m $k_2 = 5000$ N/m $k_3 = 1000$ N/m
- Semi lunghezza dell'asta .... $a = 400$ mm
- Lunghezza della manovella OP .... $R = 80$ mm
- Velocità angolare della manovella .... $n = 150$ giri/min

Esercizio 21 - Cod. VIB-084

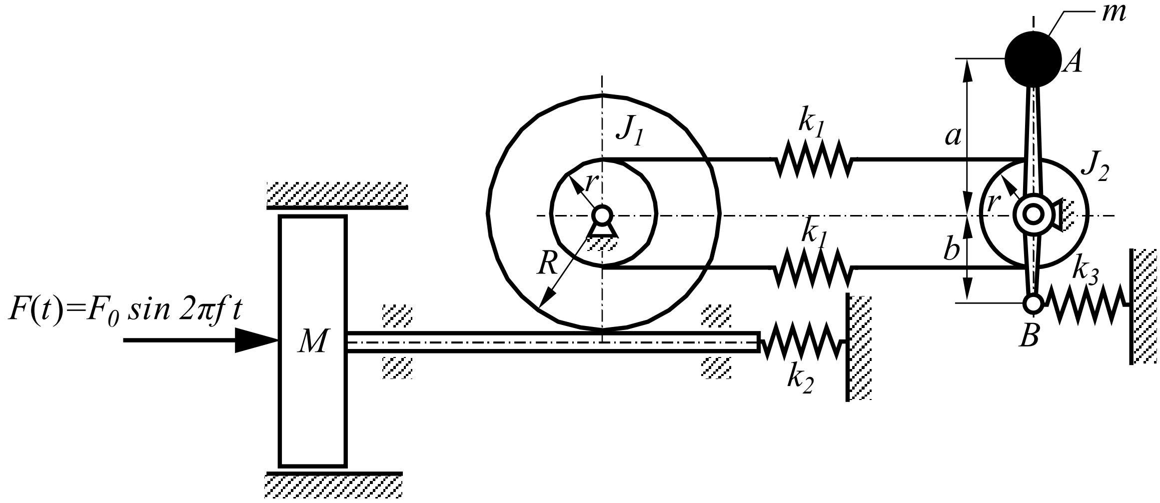


Determinare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare relativi alle vibrazioni torsionali dell'albero rappresentato in figura.

Dati

- Momenti d'inerzia dei tre dischi .... $J_1 = 3\ \mathrm{kg\,m^2}$ $J_2 = 4\ \mathrm{kg\,m^2}$ $J_3 = 5\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Lunghezze dei due tratti di albero .... $l_1 = 400$ mm $l_2 = 700$ mm
- Diametro dell'albero .... $d = 40$ mm
- Modulo di elasticità tangenziale del materiale costituente l'albero (acciaio) .... $G = 80\ \mathrm{kN/mm^2}$

Esercizio 22 - Cod. VIB-090



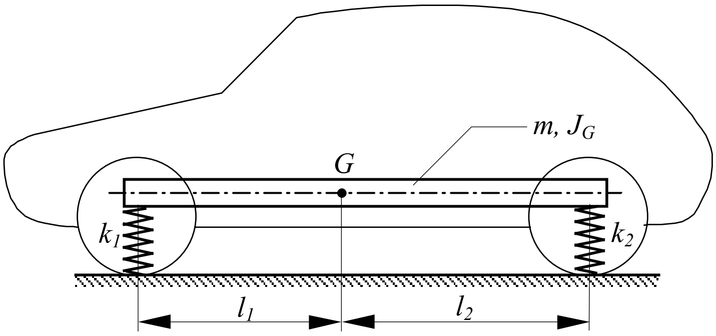
Il sistema meccanico rappresentato in figura, posto in un piano verticale, è costituito da una massa traslante in direzione orizzontale e soggetta all'azione di una forza esterna variabile nel tempo con legge sinusoidale.
Tramite un'asta a cremagliera il movimento viene trasmesso ad una ruota dentata di raggio primitivo R, montata coassialmente con una puleggia di raggio r.
Mediante una trasmissione a cinghia viene azionata un'altra puleggia di raggio r, solidale ad un'asta AB, di massa trascurabile; all'estremo A dell'asta è fissata una massa m, mentre all'estremo B è collegata una molla di rigidezza k_3.
Un'altra molla, di rigidezza k_2 è fissata fra il telaio e l'asta a cremagliera.
L'elasticità dei rami della cinghia viene schematizzata mediante due molle di rigidezza k_1.
Nella posizione di equilibrio l'asta AB è verticale e tutte le molle sono scariche.
Supponendo trascurabili gli attriti e ritenendo valida l'ipotesi di piccole oscillazioni dell'asta AB nell'intorno della posizione verticale, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto del sistema;
2. calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
3. calcolare l'ampiezza delle vibrazioni in condizioni di regime.

Dati

- Massa traslante (stantuffo e asta a cremagliera) .... $M = 7$ kg
- Momento d'inerzia della ruota dentata e della puleggia sinistra .... $J_1 = 0.2$ kg m^2
- Momento d'inerzia della puleggia destra .... $J_2 = 0.01$ kg m^2
- Massa solidale al punto A .... $m = 2$ kg
- Rigidezze delle molle .... $k_1 = 3000$ N/m $k_2 = 4000$ N/m $k_3 = 500$ N/m
- Lunghezze dei bracci dell'asta AB .... $a = 250$ mm $b = 150$ mm
- Raggio primitivo della ruota dentata .... $R = 200$ mm
- Raggi delle pulegge .... $r = 80$ mm
- Valore massimo della forzante .... $F_0 = 100$ N
- Frequenza della forzante .... $f = 5$ Hz

Esercizio 23 - Cod. VIB-093

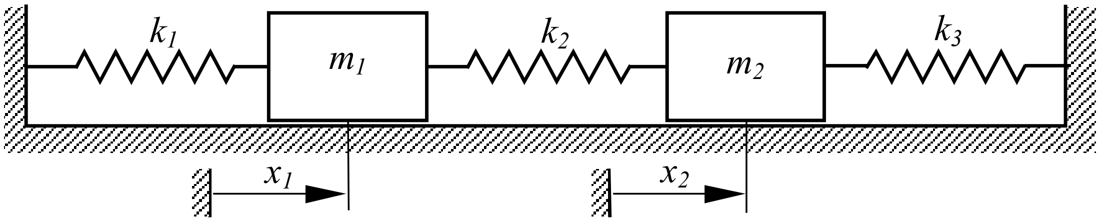


Calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare di un'automobile, schematizzata mediante il modello indicato in figura (corpo rigido su appoggi elastici).

Dati

- Massa del veicolo .... $m = 1000$ kg
- Momento d'inerzia baricentrico del veicolo .... $J_G = 810\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Rigidezza della sospensione anteriore .... $k_1 = 1.8 \times 10^4$ N/m
- Rigidezza della sospensione posteriore .... $k_2 = 2.2 \times 10^4$ N/m
- Distanza del baricentro dall'asse anteriore .... $l_1 = 1$ m
- Distanza del baricentro dall'asse posteriore .... $l_2 = 1.5$ m

Esercizio 24 - Cod. VIB-096



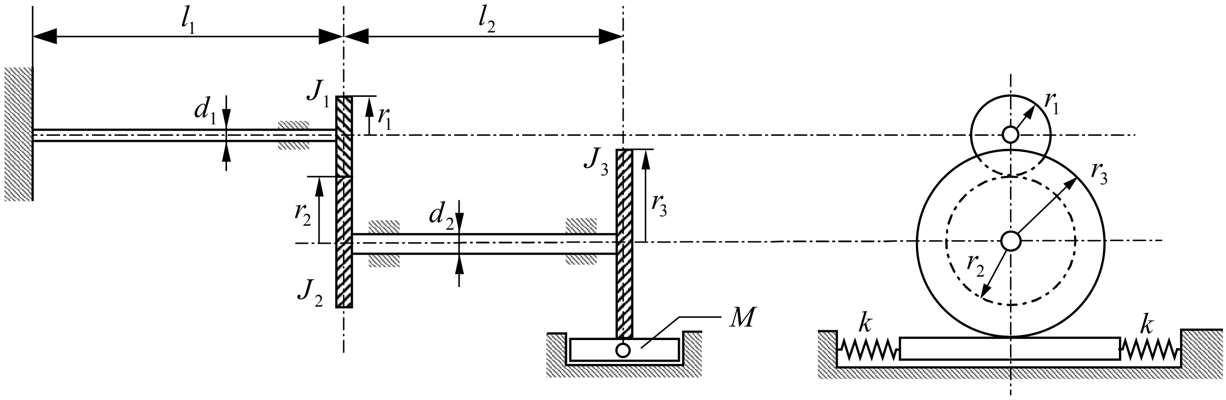
Per il sistema vibrante rappresentato in figura si chiede di determinare:

1. le pulsazioni proprie;
2. i modi principali di vibrare;
3. le leggi di moto delle due masse, quando vengono assegnate le condizioni iniziali sotto riportate.

Dati

- Masse .... $m_1 = 1.6$ kg $\quad m_2 = 2.5$ kg
- Rigidezze delle molle .... $k_1 = 2000$ N/m $\quad k_2 = 4000$ N/m $\quad k_3 = 3000$ N/m
- Condizioni iniziali .... $\begin{cases} x_1(0) = 0.3 \text{ m} \\ \dot{x}_1(0) = 1 \text{ m/s} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(0) = 0.2 \text{ m} \\ \dot{x}_2(0) = 6 \text{ m/s} \end{cases}$

Esercizio 25 - Cod. VIB-101



Il sistema rappresentato in figura è costituito dai seguenti elementi:

- una coppia di ruote dentate aventi raggio primitivo r_1 ed r_2 rispettivamente;
- una barra di torsione in acciaio avente lunghezza l_1 e diametro d_1;
- un albero in acciaio di lunghezza l_2 e diametro d_2;
- una slitta di massa M scorrevole all'interno di una guida rettilinea;
- una ruota dentata di raggio primitivo r_3 che trasmette il moto alla slitta tramite una cremagliera (non rappresentata in figura);
- due molle di uguale rigidezza k collegate alla slitta come in figura.

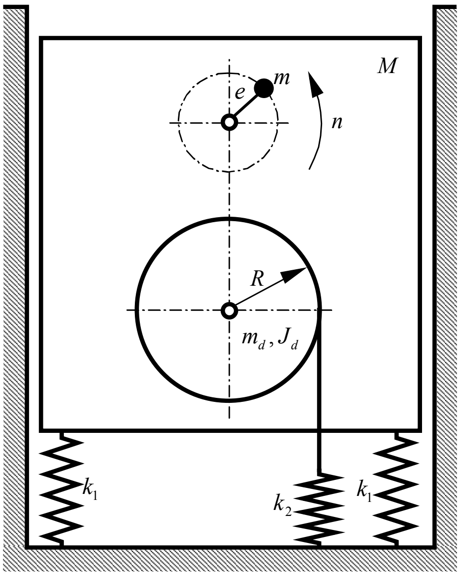
Nell'ipotesi che tutte le dissipazioni energetiche dovute ai fenomeni di attrito siano trascurabili, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto del sistema;
2. determinare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare.

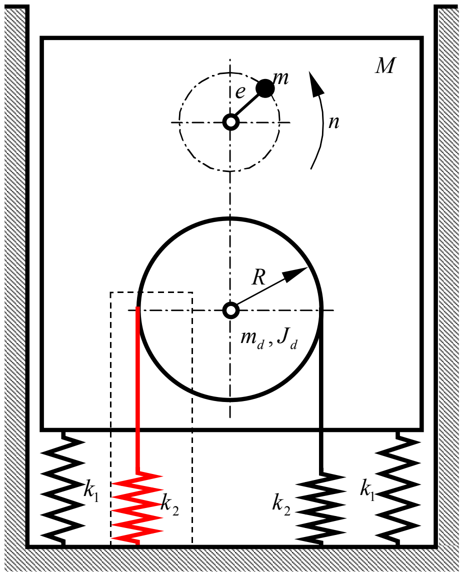
Dati

- Momenti d'inerzia delle ruote dentate .... $J_1 = 0.01$ kg m^2 $J_2 = 0.35$ kg m^2 $J_3 = 3.2$ kg m^2
- Massa della slitta .... $M = 40$ kg
- Raggi primitivi delle ruote dentate .... $r_1 = 80$ mm $r_2 = 200$ mm $r_3 = 350$ mm
- Lunghezza e diametro della barra di torsione .... $l_1 = 750$ mm $d_1 = 20$ mm
- Lunghezza e diametro dell'albero .... $l_2 = 700$ mm $d_2 = 30$ mm
- Modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio .... $G = 80$ kN/mm^2
- Rigidezza delle molle collegate alla slitta .... $k = 12000$ N/m

Esercizio 26 - Cod. VIB-102



a)



b)

Il sistema rappresentato in Figura a) è costituito da una macchina di massa M, vincolata a terra mediante due supporti elastici di rigidezza k_1.
Sulla macchina è montato un disco di massa m_d, momento d'inerzia baricentrico J_d e raggio R, al quale è fissata una molla di rigidezza k_2, disposta come in figura.
La macchina è sottoposta ad una eccitazione armonica generata da un rotore eccentrico di massa m ed eccentricità e, rotante a velocità angolare costante n.
Nell'ipotesi che tutti i fenomeni di smorzamento siano trascurabili, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto del sistema di Figura a);
2. calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
3. determinare l'ampiezza delle oscillazioni in condizioni di regime;
4. nel caso in cui al disco venga aggiunta una seconda molla (sempre di rigidezza k_2), come rappresentato in Figura b), dire come si modificano le equazioni di moto e commentare il risultato ottenuto.

Dati

- Massa della macchina .... $M = 100$ kg
- Massa del disco .... $m_d = 40$ kg
- Momento d'inerzia del disco .... $J_d = 0.6\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Massa del rotore eccentrico .... $m = 15$ kg
- Eccentricità del rotore .... $e = 8$ mm
- Raggio del disco .... $R = 180$ mm
- Rigidezza dei supporti elastici .... $k_1 = 8500$ N/m
- Rigidezza dei rami della fune .... $k_2 = 2500$ N/m
- Velocità angolare del rotore .... $n = 100$ giri/min

Esercizio 27 - Cod. VIB-104

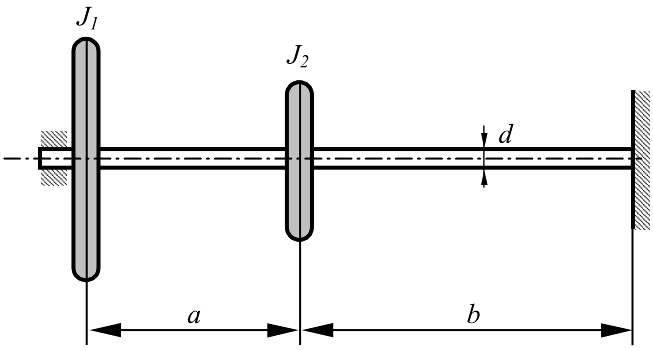


Figura 1

In Figura 1 è rappresentata una barra di torsione di acciaio sulla quale sono montate due masse aventi momento d'inerzia pari a J_1 e J_2.
I due tratti della barra hanno lo stesso diametro d e differenti lunghezze (indicate con i simboli a e b in figura).

Domande

1. calcolare le rigidezze torsionali dei due tratti della barra;
2. scrivere le equazioni di moto delle due masse;
3. calcolare le pulsazioni proprie del sistema;
4. calcolare i modi principali di vibrare e disegnare i grafici delle forme modali.

Dati

- Momenti d'inerzia delle due masse .... $J_1 = 6\ \mathrm{kg\,m^2}$ $J_2 = 4\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Diametro della barra di torsione .... $d = 20$ mm
- Lunghezza dei due tratti della barra .... $a = 0.6$ m $b = 1$ m
- Modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio .... $G = 80\ \mathrm{kN/mm^2}$

Esercizio 28 - Cod. VIB-106

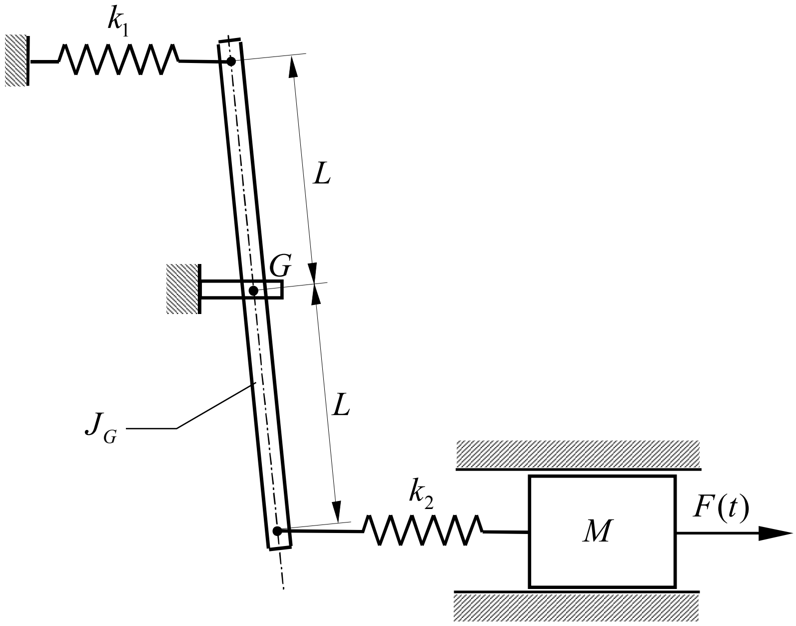


Figura 1

Il sistema vibrante rappresentato in Figura 1 è costituito da un'asta incernierata nel baricentro e collegata ad una molla di rigidezza k_1 in corrispondenza dell'estremità superiore.
Una seconda molla, di rigidezza k_2, collega l'estremo inferiore dell'asta ad una massa M, che può scorrere orizzontalmente all'interno di una guida rettilinea.
Nell'ipotesi che l'asta compia piccole oscillazioni attorno alla posizione verticale (di equilibrio statico) e che la massa M scorra senza attrito all'interno della guida, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto del sistema;
2. calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
3. determinare, in condizioni di regime, l'ampiezza delle oscillazioni dell'asta e della massa traslante, quando quest'ultima è sottoposta all'azione di una forzante armonica $F(t)$ di intensità e frequenza assegnate.

Dati

- Massa traslante .... $M = 10$ kg
- Momento d'inerzia baricentrico dell'asta .... $J_G = 0.5$ kg m^2
- Semi-lunghezza dell'asta .... $L = 600$ mm
- Rigidezza delle molle .... $k_1 = 1000$ N/m $\quad k_2 = 2500$ N/m
- Valore massimo della forza applicata .... $F_0 = 50$ N
- Frequenza della forza applicata .... $f = 2$ Hz

Esercizio 29 - Cod. VIB-108

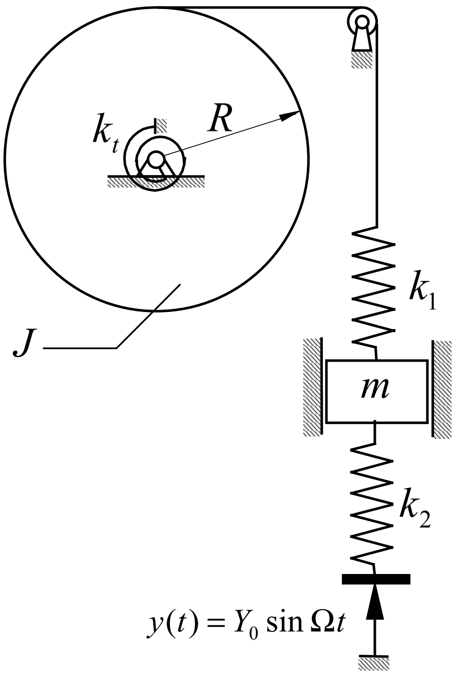


Figura 1

Per il sistema vibrante rappresentato in Figura 1, nell'ipotesi che la fune sia inestensibile e che la puleggia di rinvio abbia inerzia trascurabile, si chiede di:

- scrivere le equazioni di moto del sistema;
- calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare;
- studiare le vibrazioni forzate del sistema, quando l'estremo inferiore della molla di rigidezza k_2 si muove con legge sinusoidale $y(t) = Y_0 \sin \Omega t$.

Dati

- Massa traslante .... $m = 4$ kg
- Momento d'inerzia del disco .... $J = 0.04$ kg m^2
- Rigidezza della molla torsionale .... $k_t = 50$ Nm/rad
- Rigidezza delle molle collegate alla massa traslante .... $k_1 = 4000$ N/m $k_2 = 2000$ N/m
- Raggio del rullo .... $R = 100$ mm
- Ampiezza del moto armonico imposto .... $Y_0 = 100$ mm
- Pulsazione del moto armonico imposto .... $\Omega = 10$ rad/s

Esercizio 30 - Cod. VIB-115

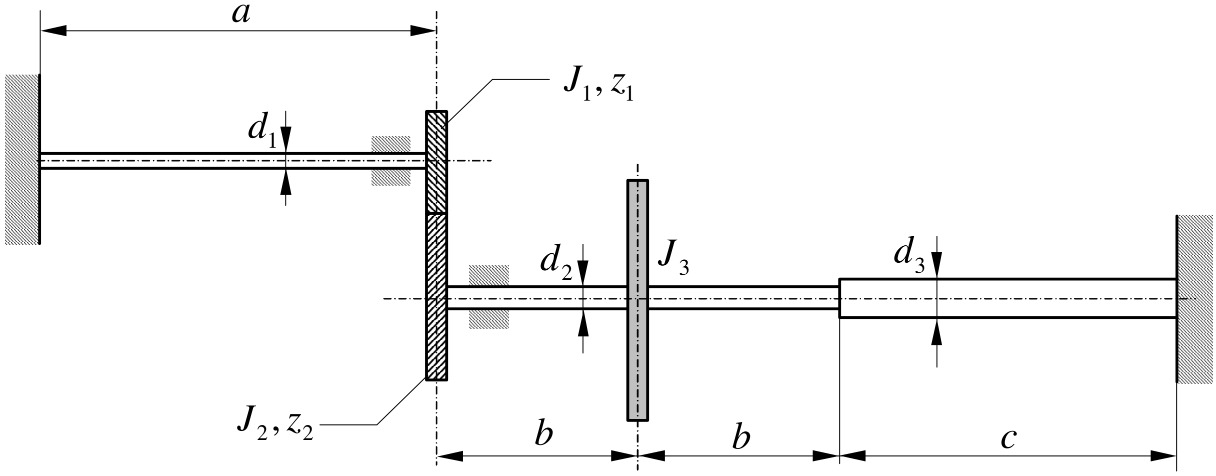


Figura 1

Per il sistema rappresentato in Figura 1, nell'ipotesi che siano trascurabili dissipazioni di energia dovute ai fenomeni di attrito e la massa degli elementi deformabili a torsione, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto;
2. determinare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare relativi alle vibrazioni torsionali.

Dati

- Momenti d'inerzia: .... $J_1 = 0.03\ \mathrm{kg\,m^2}$, $J_2 = 2.4\ \mathrm{kg\,m^2}$, $J_3 = 3.5\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Numero di denti delle ruote dentate: .... $z_1 = 40$, $z_2 = 120$
- Lunghezza degli elementi deformabili a torsione: .... $a = 400$ mm, $b = 230$ mm, $c = 350$ mm
- Diametro degli elementi deformabili a torsione: .... $d_1 = 15$ mm, $d_2 = 18$ mm, $d_3 = 24$ mm
- Modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio .... $G = 80\ \mathrm{kN/mm^2}$

Esercizio 31 - Cod. VIB-122

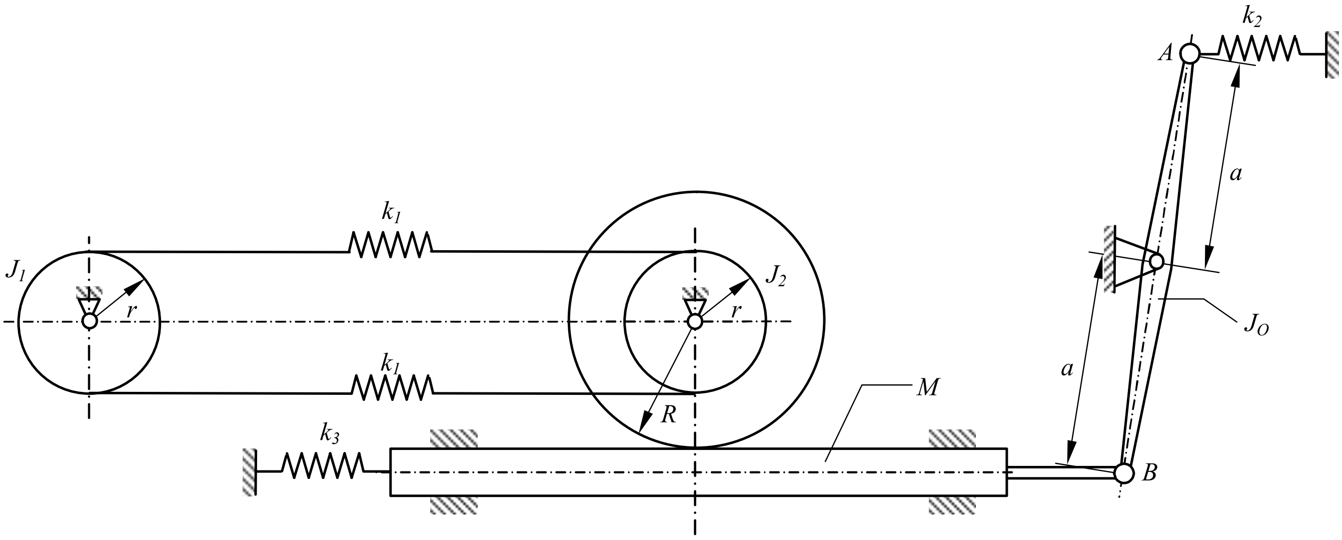


Figura 1

Calcolare le pulsazioni proprie e i modi principali di vibrare per il sistema in Figura 1, nell'ipotesi che:

a) l'asta AB compia piccole oscillazioni;
b) la trasmissione del moto fra la ruota di frizione di raggio R e la slitta sottostante avvenga in assenza di slittamento.

Dati

- Massa della slitta .... $M = 40$ kg
- Momento d'inerzia della puleggia sinistra .... $J_1 = 0.015\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Momento d'inerzia complessivo della puleggia destra e della ruota di frizione .... $J_2 = 0.16\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Momento d'inerzia del'asta rispetto al perno O .... $J_O = 0.25\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Rigidezza dei rami della cinghia .... $k_1 = 5 \times 10^4$ N/m
- Rigidezza della molla collegata al punto A .... $k_2 = 2.5 \times 10^4$ N/m
- Rigidezza della molla collegata alla slitta .... $k_3 = 10^4$ N/m
- Raggio delle pulegge .... $r = 80$ mm
- Raggio della ruota di frizione .... $R = 160$ mm
- Semi-lunghezza dell'asta AB .... $a = 200$ mm

Esercizio 32 - Cod. VIB-123

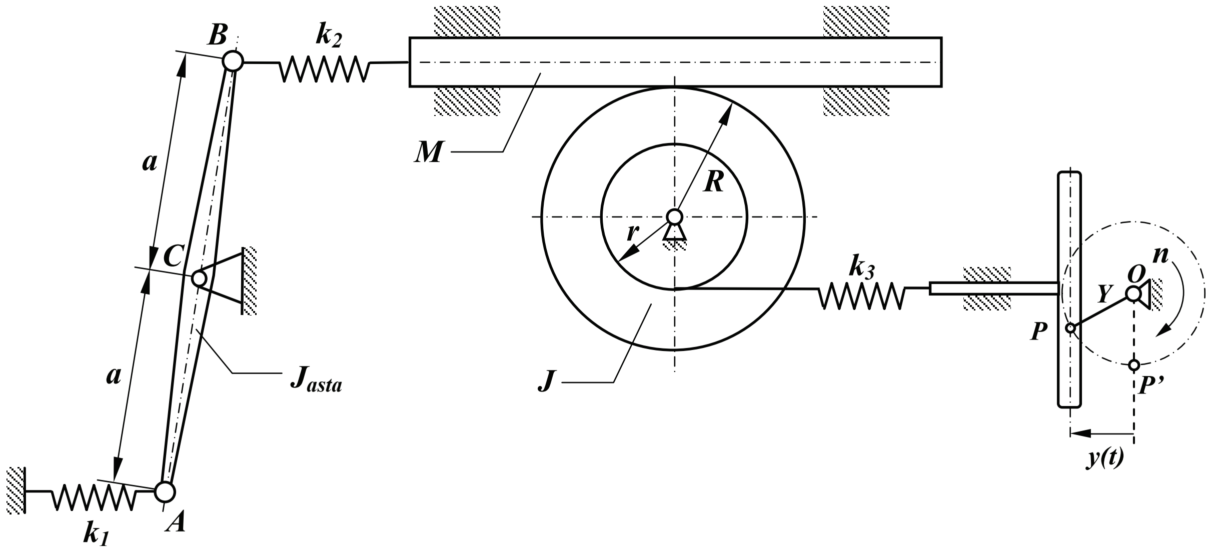


Figura 1

Si consideri il sistema vibrante rappresentato in Figura 1; nell'ipotesi che l'asta AB compia piccole oscillazioni e che l'attrito tra la slitta ed i supporti sia trascurabile, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto del sistema;
2. calcolare le frequenze proprie di vibrazione;
3. calcolare i vettori modali;
4. studiare il moto a regime quando la manovella OP ruota a velocità angolare costante.

Dati

- Massa della slitta .... $M = 50$ kg
- Momento d'inerzia complessivo della puleggia e della ruota di frizione .... $J = 0.015$ kg m^2
- Momento d'inerzia dell'asta rispetto al perno C .... $J_{asta} = 0.35$ kg m^2
- Rigidezza delle molle .... $k_1 = 15$ kN/m $k_2 = 10$ kN/m $k_3 = 12$ kN/m
- Raggio della puleggia .... $r = 75$ mm
- Raggio della ruota di frizione .... $R = 150$ mm
- Semi-lunghezza dell'asta AB .... $a = 250$ mm
- Lunghezza della manovella OP .... $Y = 50$ mm
- Velocità angolare della manovella OP .... $n = 50$ giri/min

Esercizio 33 - Cod. VIB-124

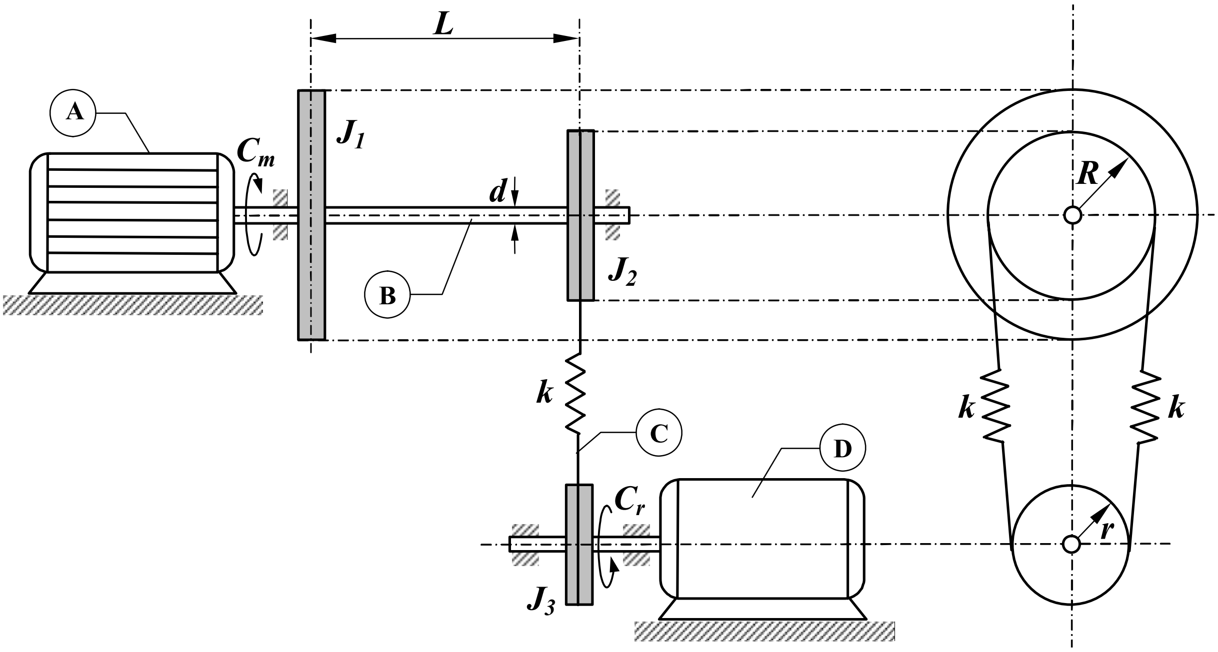


Figura 1

La macchina rappresentata schematicamente in Figura 1 è costituita da un motore (A), un albero di trasmissione di acciaio (B), una cinghia (C) e un dispositivo utilizzatore (D).
La coppia motrice e la coppia resistente sono indicate in figura con i simboli C_m e C_r rispettivamente, mentre i momenti d'inerzia delle masse rotanti sono indicati con il simbolo J seguito da un pedice numerico.
Sia k_t la rigidezza torsionale dell'albero di trasmissione e k la rigidezza di ciascun ramo della cinghia.
Supponendo trascurabili tutti gli effetti di smorzamento, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto del sistema;
2. calcolare le pulsazioni proprie;
3. calcolare i vettori modali.

Dati

- Momenti d'inerzia delle masse rotanti .... $J_1 = 2\ \mathrm{kg\,m^2}$ $J_2 = 0.4\ \mathrm{kg\,m^2}$ $J_3 = 0.12\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Rigidezza dei rami della cinghia .... $k = 4 \times 10^6$ N/m
- Raggi delle pulegge .... $r = 150$ mm $R = 200$ mm
- Lunghezza dell'albero di trasmissione .... $L = 1$ m
- Diametro dell'albero di trasmissione .... $d = 30$ mm
- Modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio .... $G = 80\ \mathrm{kN/mm^2}$

Esercizio 34 - Cod. VIB-128

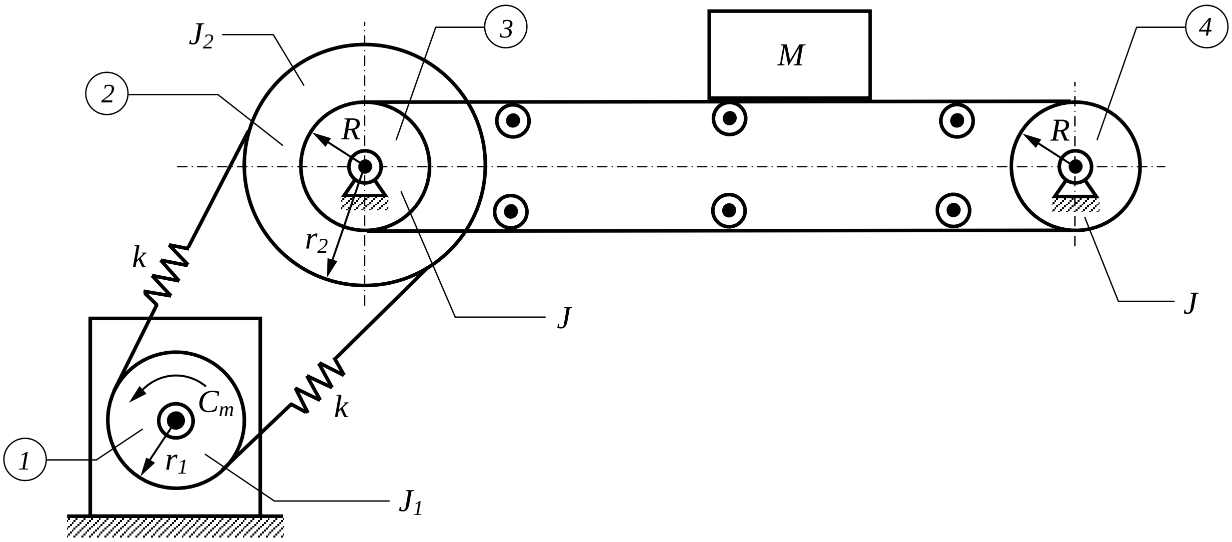


Figura 1

In Figura 1 è rappresentato schematicamente un nastro trasportatore azionato da un motore elettrico tramite una trasmissione a cinghia. I rami della cinghia presentano un certo grado di cedevolezza e vengono pertanto schematizzati mediante due molle di uguale rigidezza k. Utilizzando i dati sotto indicati e ritenendo trascurabili i fenomeni di smorzamento, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto del sistema;
2. calcolare le pulsazioni proprie;
3. calcolare i modi principali di vibrare.

Dati

- Massa della cassa trasportata dal nastro .... $M = 60$ kg
- Momento d'inerzia della puleggia motrice (1) .... $J_1 = 0.013$ kg m^2
- Momento d'inerzia della puleggia (2) .... $J_2 = 1$ kg m^2
- Momento d'inerzia delle pulegge (3) e (4) .... $J = 0.01$ kg m^2
- Raggio della puleggia motrice (1) .... $r_1 = 80$ mm
- Raggio della puleggia (2) .... $r_2 = 240$ mm
- Raggio delle pulegge (3) e (4) .... $R = 75$ mm
- Rigidezza dei rami della cinghia .... $k = 5 \times 10^6$ N/m

Esercizio 35 - Cod. VIB-129

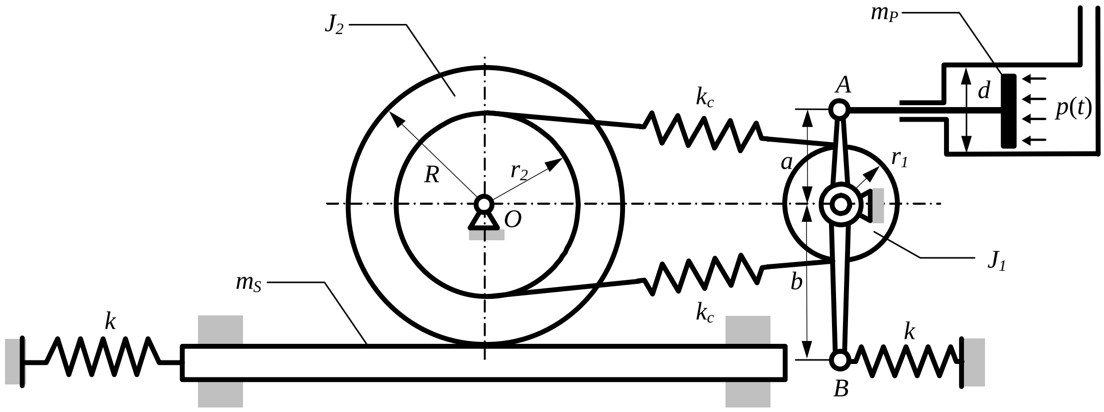


Figura 1

Il meccanismo rappresentato schematicamente in Figura 1 è mosso da un pistone sul quale agisce la pressione $p(t)$ di un fluido. La leva AB, solidale alla puleggia di raggio r_1, viene azionata dal pistone e, tramite la cinghia, il movimento viene trasmesso alla puleggia di raggio r_2, montata coassialmente con la ruota dentata di raggio primitivo R. Tramite una cremagliera il moto viene trasmesso alla slitta. Per semplicità di rappresentazione le dentature della ruota e della cremagliera non sono state rappresentate in figura. La cinghia ha un comportamento non perfettamente rigido e pertanto i suoi due rami vengono schematizzati mediante due molle di rigidezza k_c. L'estremità B della leva è collegata al telaio tramite una molla di rigidezza k; una seconda molla, anch'essa di rigidezza k, collega la slitta al telaio.
Si suppongano valide le seguenti ipotesi:

- massa della leva trascurabile;
- piccole oscillazioni della leva attorno alla posizione verticale;
- assenza di attrito sui supporti della slitta.

Domande

1. scrivere le equazioni di moto del sistema;
2. determinare le frequenze proprie del sistema;
3. calcolare i rapporti fra le ampiezze di oscillazione delle pulegge nei due modi principali di vibrare del sistema.
4. supponendo che la pressione nel cilindro sia variabile nel tempo con legge sinusoidale $p(t) = p_{max} \sin \Omega t$ calcolare il moto del sistema in condizioni di regime (i valori negativi di pressione indicano la presenza di una depressione nel cilindro).

Dati

- Massa del pistone .... $m_p = 2$ kg
- Massa della slitta .... $m_s = 4$ kg
- Momento d'inerzia della puleggia di raggio minore .... $J_1 = 5 \times 10^{-4}$ kg m^2
- Momento d'inerzia totale delle masse rotanti attorno al perno O .... $J_2 = 0,08$ kg m^2
- Raggi delle pulegge .... $r_1 = 30$ mm $r_2 = 90$ mm
- Raggio primitivo della ruota dentata .... $R = 150$ mm
- Lunghezze dei bracci della leva .... $a = 50$ mm $b = 100$ mm
- Rigidezza dei rami della cinghia .... $k_c = 5 \times 10^6$ N/m
- Rigidezza della molla collegata alla leva .... $k = 2000$ N/m
- Pressione massima nel cilindro .... $p_{max} = 30000$ Pa
- Pulsazione della pressione nel cilindro .... $\Omega = 10$ rad/s
- Diametro del cilindro .... $d = 50$ mm

Esercizio 36 - Cod. VIB-132

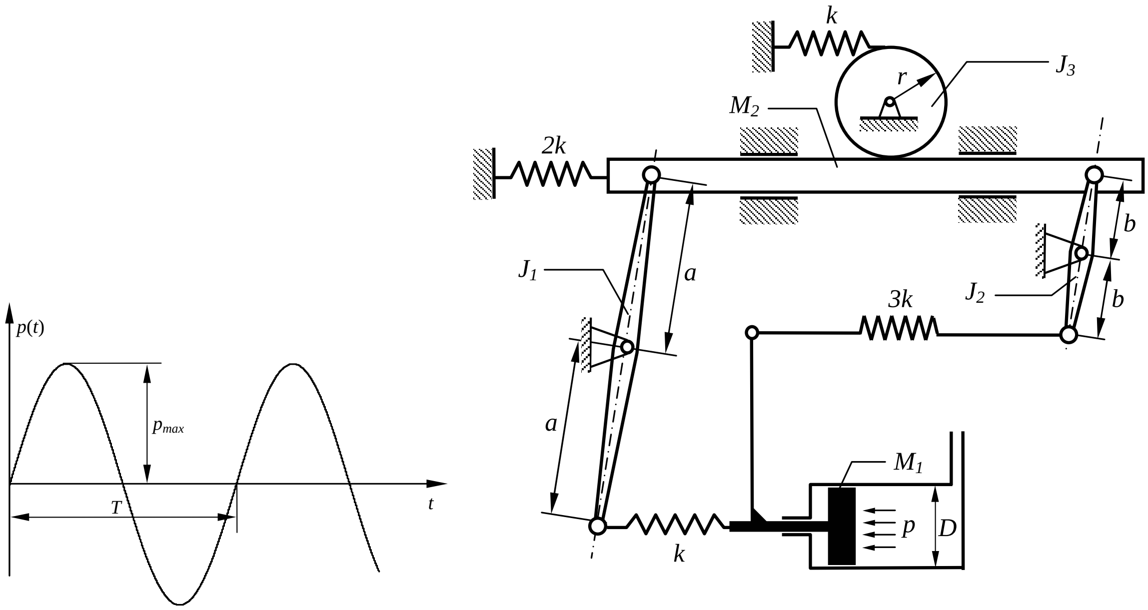


Figura 1

Per il sistema vibrante rappresentato in Figura 1, nell'ipotesi che le aste compiano piccole oscillazioni e la trasmissione del moto tra la slitta e il disco avvenga in assenza di strisciamento, si chiede di:

1. scrivere le equazioni di moto;
2. calcolare le pulsazioni proprie e i modi principali di vibrare;
3. supponendo che la pressione nel cilindro oscilli secondo la legge sinusoidale[3] rappresentata in figura, determinare il movimento del pistone e della slitta in condizioni di regime.

Dati

- Massa del pistone .... $M_1 = 2$ kg
- Massa della slitta .... $M_2 = 6$ kg
- Momenti d'inerzia delle aste oscillanti rispetto ai perni .... $J_1 = 0.2\ \mathrm{kg\,m^2}$ $\quad J_2 = 0.04\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Momento d'inerzia del disco .... $J_3 = 0.03\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Raggio del disco .... $r = 90$ mm
- Semi-lunghezza delle aste oscillanti .... $a = 250$ mm $\quad b = 150$ mm
- Rigidezza .... $k = 3000$ N/m
- Pressione massima nel cilindro .... $p_{max} = 6 \times 10^4$ Pa
- Periodo con cui varia la pressione nel cilindro .... $T = 1$ s
- Diametro del cilindro .... $D = 50$ mm

[3] I valori negativi indicano una depressione nel cilindro.

Esercizio 37 - Cod. VIB-135

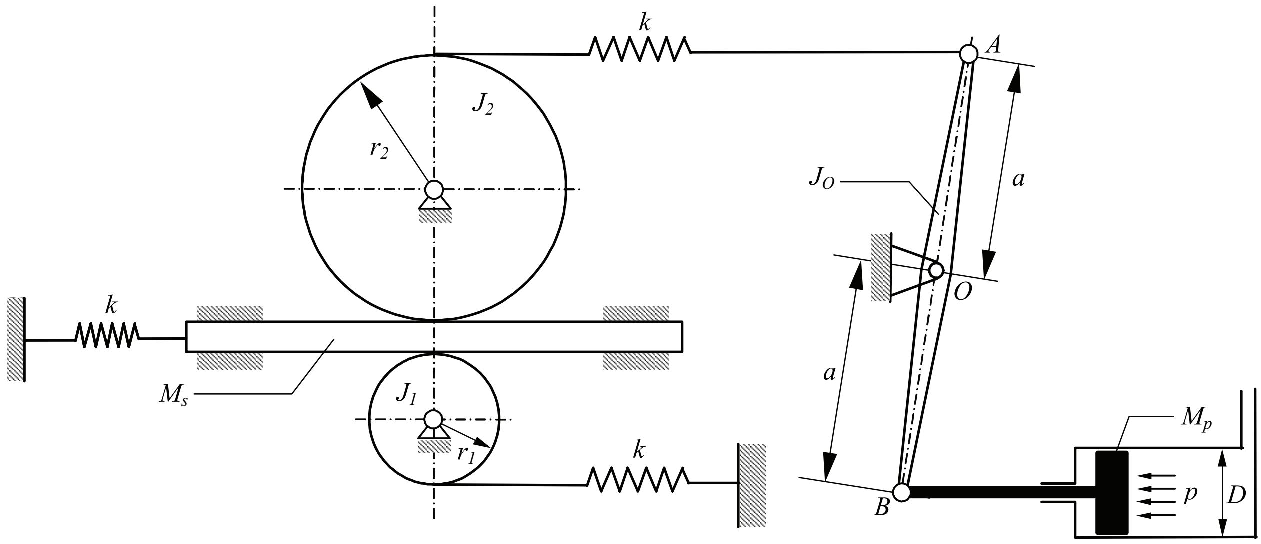


Figura 1

In Figura 1, è rappresentato un sistema vibrante azionato da un pistone idraulico.
Si ritengano valide le seguenti ipotesi:

- piccole oscillazioni dell'asta AB attorno alla posizione verticale (di equilibrio);
- attriti trascurabili;
- trasmissione del moto tra le ruote e la slitta in assenza di slittamenti.

Domande

1. scrivere le equazioni di moto del sistema vibrante;
2. calcolare le frequenze proprie;
3. calcolare i vettori modali;
4. supponendo che la pressione nel cilindro oscilli secondo la legge sinusoidale[4] $p(t) = p_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$. determinare il movimento del pistone e della slitta in condizioni di regime.

Dati

- Massa del pistone .... $M_p = 2$ kg
- Massa della slitta .... $M_s = 10$ kg
- Momento d'inerzia dell'asta AB rispetto al punto O .... $J_O = 0.035\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Momenti d'inerzia delle ruote .... $J_1 = 0.012\ \mathrm{kg\,m^2}$ $J_2 = 0.125\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Rigidezza delle molle .... $k = 6000$ N/m
- Lunghezza dei bracci dell'asta .... $a = 180$ mm
- Raggi delle ruote .... $r_1 = 70$ mm $r_2 = 150$ mm
- Pressione massima agente sul pistone .... $p_{max} = 200$ kPa
- Diametro del pistone .... $D = 20$ mm
- Periodo con cui varia la pressione nel cilindro .... $T = 1$ s

[4]I valori negativi indicano una depressione nel cilindro.

Esercizio 38 - Cod. VIB-136

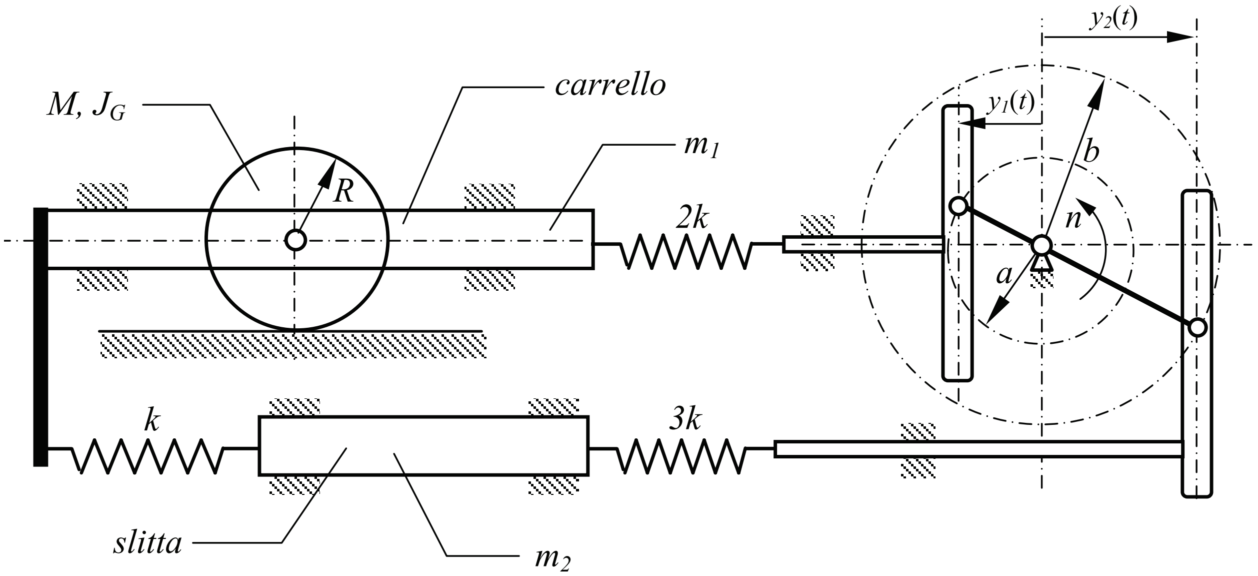


Figura 1

In Figura 1 è rappresentato un sistema vibrante azionato da un doppio manovellismo a croce.
Si ritengano valide le seguenti ipotesi:

- assenza di fenomeni dissipativi;
- rotolamento senza strisciamento della ruota sulla superficie sottostante;
- velocità angolare delle manovelle costante.

Domande

1. scrivere le equazioni di moto del sistema vibrante;
2. calcolare le frequenze proprie e i vettori modali;
3. determinare il moto del sistema in condizioni di regime;
4. sempre supponendo che il sistema operi in condizioni di regime, calcolare i valori della velocità angolare delle manovelle per cui:
   a) il carrello rimane fermo;
   b) la slitta rimane ferma.

Dati

- Massa del carrello .... $m_1 = 10$ kg
- Massa della slitta .... $m_2 = 20$ kg
- Massa della ruota .... $M = 4$ kg
- Momento d'inerzia baricentrico della ruota .... $J_G = 0.015\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Rigidezza .... $k = 6000$ N/m
- Raggi di manovella .... $a = 75$ mm $\quad b = 150$ mm
- Raggio della ruota .... $R = 80$ mm
- Velocità angolare delle manovelle .... $n = 600$ giri/min

Esercizio 39 - Cod. VIB-139

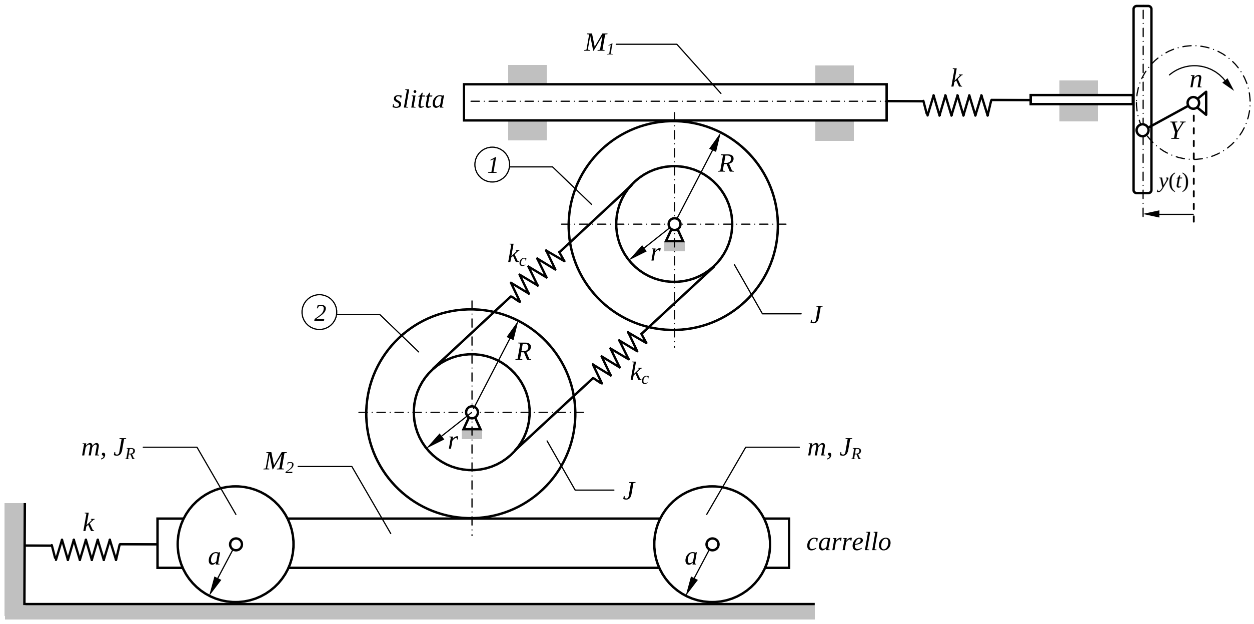


Figura 1

In Figura 1 è rappresentato un sistema vibrante azionato da un manovellismo a croce, la cui manovella ruota a velocità angolare costante.
Si ritengano valide le seguenti ipotesi:

- assenza di slittamento fra i corpi rotanti (1) e (2) ed i corrispondenti elementi traslanti (slitta e carrello);
- fenomeni dissipativi trascurabili;
- rotolamento senza strisciamento delle ruote del carrello sul terreno.

Domande

1. Scrivere le equazioni di moto del sistema.
2. Calcolare le frequenze proprie e i vettori modali.
3. Determinare le ampiezze di vibrazione della slitta e del carrello in condizioni di regime.

Dati

- Massa della slitta .... $M_1 = 12$ kg
- Massa del carrello .... $M_2 = 20$ kg
- Massa delle ruote .... $m = 1.5$ kg
- Momento d'inerzia baricentrico dei corpi rotanti (1) e (2) .... $J = 0.3\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Momento d'inerzia baricentrico delle ruote del carrello .... $J_R = 8 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Rigidezza dei due rami della cinghia .... $k_c = 5 \times 10^5$ N/m
- Rigidezza delle molle .... $k = 2.5 \times 10^4$ N/m
- Raggi dei corpi rotanti (1) e (2) .... $r = 120$ mm $\quad R = 240$ mm
- Raggio delle ruote .... $a = 100$ mm
- Lunghezza della manovella .... $Y = 90$ mm
- Velocità angolare della manovella .... $n = 200$ giri/min