Vibrazioni di sistemi continui monodimensionali

Esercizio 1 - Cod. VIB-039

Determinare la legge di movimento di una corda uniforme di lunghezza l, fissata ad entrambe le estremità, che viene pizzicata in corrispondenza del suo punto medio, come indicato in Figura 1, e successivamente rilasciata.

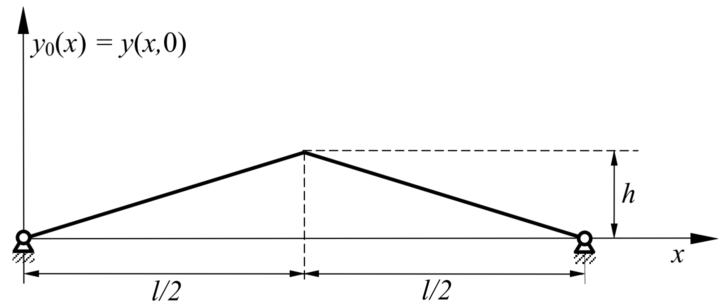


Figura 1

Soluzione

Indichiamo con T il tiro, supposto costante, a cui è soggetta la corda e con ϱ la densità lineare (massa per unità di lunghezza) della corda stessa.
La velocità c di propagazione dell'onda lungo la corda risulta:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\varrho}} \tag{1}$$

mentre l'equazione di moto è data dalla seguente espressione:

$$y(x,t) = Y(x)f(t) = \left(A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c}\right)(C\cos\omega t + D\sin\omega t) \tag{2}$$

Poiché la corda è fissata ad entrambe le estremità, possiamo scrivere le condizioni ad contorno sotto riportate:

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(l,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Poiché la funzione $f(t)$ risulta, in generale, diversa da zero, le condizioni (3) si trasformano nelle seguenti:

$$\begin{cases} Y(0) = 0 \\ Y(l) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Dalla prima delle (4) si ricava $A = 0$, mentre dalla seconda delle (4) si ha:

$$\sin\frac{\omega l}{c} = 0 \tag{5}$$

dovendo risultare $B \neq 0$, al fine di non ottenere una soluzione identicamente nulla.
Risolvendo la (5) si ottengono i valori delle pulsazioni proprie:

$$\frac{\omega_n l}{c} = n\pi \qquad \Rightarrow \qquad \omega_n = \frac{n\pi c}{l} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

L'n-esimo modo di vibrare risulta pertanto definito dall'equazione:

$$y_n(x,t) = Y_n(x) f_n(t) = \sin\frac{n\pi x}{l}\left(C_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + D_n \sin\frac{n\pi c}{l}t\right) \tag{7}$$

La legge di movimento della corda si ottiene per sovrapposizione degli infiniti modi di vibrare $y_n(x,t)$; si ha pertanto:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left(C_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + D_n \sin\frac{n\pi c}{l}t\right) \tag{8}$$

Derivando la (8) si ricava l'espressione della velocità per i vari punti della corda:

$$\dot{y}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left(-\frac{n\pi c}{l}C_n \sin\frac{n\pi c}{l}t + \frac{n\pi c}{l}D_n \cos\frac{n\pi c}{l}t\right) \tag{9}$$

Indichiamo ora con $y_0(x)$ la configurazione iniziale deformata della corda:

$$y_0(x) = y(x,0) \tag{10}$$

Poiché la corda è in quiete all'istante iniziale si ha:

$$\dot{y}_0(x) = \dot{y}(x,0) = 0 \tag{11}$$

Applicando le condizioni iniziali (10) e (11) alle (8) e (9) si ricavano le seguenti relazioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l} = y_0(x) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} D_n \sin\frac{n\pi x}{l} = 0 \tag{12}$$

Dalla seconda delle (12) si deduce immediatamente che deve essere:

$$D_n = 0 \qquad \text{per} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{13}$$

l calcolo dei coefficienti C_n si può effettuare moltiplicando la prima delle (12) per $\sin\frac{m\pi x}{l}$ ed integrando rispetto ad x da 0 ad l; il risultato che si ottiene è il seguente[1]:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l y_0(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx \tag{14}$$

[1]Illustriamo nel dettaglio i passaggi da effettuare per ricavare i coefficienti C_n a partire dalla prima delle (12):

- moltiplichiamo la prima delle (12) per $\sin\frac{m\pi x}{l}$:

$$\sin\frac{m\pi x}{l}\left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right] = y_0(x)\sin\frac{m\pi x}{l} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l} = y_0(x)\sin\frac{m\pi x}{l}$$

- integriamo fra 0 ed l:

$$\int_0^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\right] dx = \int_0^l y_0(x)\sin\frac{m\pi x}{l} dx$$

- applichiamo la proprietà di linearità degli integrali (l'integrale di un sommatoria di funzioni è uguale alla sommatoria degli integrali delle singole funzioni):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n \int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\right] dx = \int_0^l y_0(x)\sin\frac{m\pi x}{l} dx$$

- si osserva che:

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} l/2 & \text{per } m = n \\ 0 & \text{per } m \neq n \end{cases}$$

- quindi, di tutti i termini della sommatoria, rimane solo quello corrispondente a $m = n$; in definitiva si ottiene:

$$C_n \frac{l}{2} = \int_0^l y_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l} dx \qquad \Rightarrow \qquad C_n = \frac{2}{l}\int_0^l y_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l} dx$$

L'espressione analitica della deformata iniziale, necessaria per il calcolo dell'integrale al secondo membro della (14), si deduce dalla Figura 1:

$$y_0(x) = \begin{cases} \dfrac{2h}{l}x & \text{per } 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ \\ \dfrac{2h}{l}(l-x) & \text{per } \dfrac{l}{2} < x \le l \end{cases} \tag{15}$$

Dalla (14), tenendo conto della (15), si ricava:

$$C_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2} \frac{2h}{l} x \sin\frac{n\pi x}{l} dx + \int_{l/2}^{l} \frac{2h}{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l} dx\right] = \frac{4h}{n^2\pi^2}\left[2\sin\frac{n\pi}{2} - \sin n\pi\right] \tag{16}$$

Poiché risulta $\sin n\pi = 0$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$, si ha:

$$C_n = \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad \text{per} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{17}$$

Osservando ora che:

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & \text{per } n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0 & \text{per } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \tag{18}$$

possiamo scrivere:

$$C_n = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{8h}{n^2\pi^2} & \text{per } n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0 & \text{per } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \tag{19}$$

In definitiva, tenendo conto della (13) e della (19), l'equazione (8) può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= C_1 \sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi c}{l}t + C_3\sin\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3\pi c}{l}t + C_5\sin\frac{5\pi x}{l}\cos\frac{5\pi c}{l}t + \ldots \\ &= \frac{8h}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi c}{l}t - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3\pi c}{l}t + \frac{1}{25}\sin\frac{5\pi x}{l}\cos\frac{5\pi c}{l}t - \ldots\right] \end{aligned} \tag{20}$$

Esercizio 2 - Cod. VIB-040

Si considerino le vibrazioni assiali di un'asta omogenea di lunghezza l, avente sezione trasversale uniforme di area A_s, vincolata nei modi indicati in Figura 1:

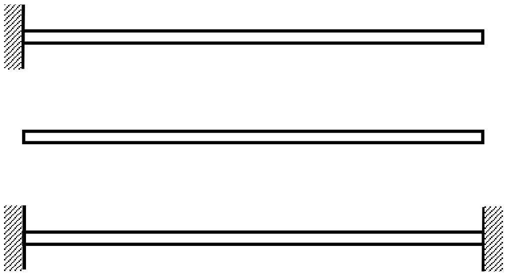


Figura 1 Condizioni di vincolo: a) incastro - estremo libero; b) estremo libero - estremo libero; c) incastro - incastro.

Siano ϱ ed E rispettivamente la densità ed il modulo di Young del materiale costituente l'asta; per ciascuna delle condizioni di vincolo specificate si chiede di determinare:

- le condizioni al contorno;
- l'equazione delle frequenze;
- le pulsazioni proprie;
- i modi principali di vibrare.

Soluzione

Indicando con $u(x,t)$ lo spostamento assiale di una generica sezione dell'asta, l'equazione delle vibrazioni assiali risulta:

$$u(x,t) = U(x)f(t) = \left(A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c}\right)(C\cos\omega t + D\sin\omega t) \tag{1}$$

dove

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \tag{2}$$

rappresenta la velocità di propagazione dell'onda lungo l'asta.
Esaminiamo ora le condizioni di vincolo sopra riportate.

Caso a): Incastro - estremo libero

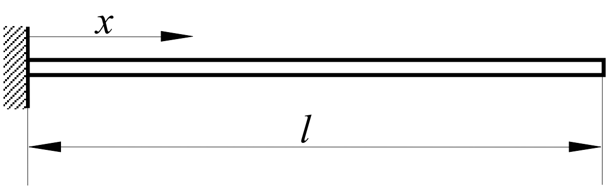


Figura 2

- *Condizioni al contorno*

  In $x = 0$ lo spostamento è nullo, quindi:

$$u(0,t) = 0 \tag{3}$$

  In $x = l$ la forza assiale N è nulla, quindi:

$$N(l,t) = EA_s\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \tag{4}$$

- *Equazione delle frequenze*

  Per ricavare l'equazione delle frequenze applichiamo le condizioni al contorno sopra riportate:

$$u(x,t) = \left(A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c}\right)f(t) \qquad \Rightarrow \qquad u(0,t) = Af(t) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \left(-\frac{\omega}{c}A\sin\frac{\omega x}{c} + \frac{\omega}{c}B\cos\frac{\omega x}{c}\right)f(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \left(\frac{\omega}{c}B\cos\frac{\omega l}{c}\right)f(t) = 0 \tag{6}$$

  Dalla (5) si deduce che deve essere $A = 0$, mentre dalla (6) si ricava l'equazione delle frequenze:

$$\cos\frac{\omega l}{c} = 0 \tag{7}$$

- *Pulsazioni proprie* Le pulsazioni proprie si ricavano risolvendo la (7) rispetto ad ω:

$$\frac{\omega l}{c} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{(2n+1)\pi c}{2l} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

- *Modi principali di vibrare* Tenendo presenti i risultati ottenuti in precedenza, l'espressione analitica dell'n-esimo modo principale di vibrare $U_n(x)$ risulta:

$$U_n(x) = C_n \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \tag{9}$$

  dove C_n rappresenta una generica costante.

Caso b): Estremo libero - estremo libero

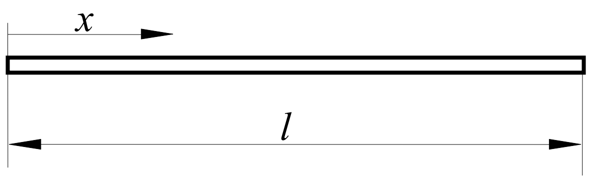


Figura 3

- *Condizioni al contorno*

  In $x = 0$ la forza assiale N è nulla, quindi:

$$N(0,t) = EA_s\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \tag{10}$$

  In $x = l$ la forza assiale N è nulla, quindi:

$$N(l,t) = EA_s\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \tag{11}$$

- *Equazione delle frequenze*

  Per ricavare l'equazione delle frequenze applichiamo le condizioni al contorno sopra riportate:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \left(-\frac{\omega}{c}A\sin\frac{\omega x}{c} + \frac{\omega}{c}B\cos\frac{\omega x}{c}\right)f(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\omega}{c}Bf(t) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \left(-\dfrac{\omega}{c}A\sin\dfrac{\omega l}{c} + \dfrac{\omega}{c}B\cos\dfrac{\omega l}{c}\right)f(t) = 0 \end{array} \tag{12}$$

  Dalla prima delle (12) si ottiene $B = 0$, mentre dalla seconda si ricava l'equazione delle frequenze:

$$\sin\frac{\omega l}{c} = 0 \tag{13}$$

- *Pulsazioni proprie*

  Le pulsazioni proprie si ricavano risolvendo la (13) rispetto ad ω:

$$\frac{\omega l}{c} = n\pi \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{n\pi c}{l} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

- *Modi principali di vibrare*

  Tenendo presenti i risultati ottenuti in precedenza, l'espressione analitica dell'n-esimo modo principale di vibrare $U_n(x)$ risulta:

$$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l} \tag{15}$$

  dove C_n rappresenta una generica costante.

Caso c): Incastro - incastro

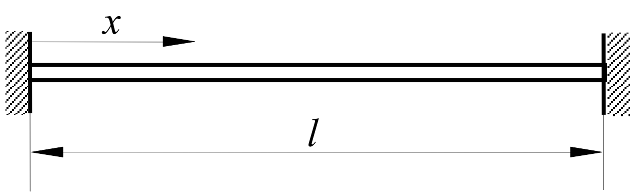


Figura 4

- *Condizioni al contorno*

  In $x = 0$ lo spostamento è nullo, quindi:

$$u(0, t) = 0 \tag{16}$$

  In $x = l$ lo spostamento è nullo, quindi:

$$u(l, t) = 0 \tag{17}$$

- *Equazione delle frequenze*

  Per ricavare l'equazione delle frequenze applichiamo le condizioni al contorno sopra riportate:

$$u(x, t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}\right) f(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &u(0, t) = A f(t) = 0 \\ &u(l, t) = \left(A \cos \frac{\omega l}{c} + B \sin \frac{\omega l}{c}\right) f(t) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

  Dalla prima delle (18) si ottiene $A = 0$, mentre dalla seconda si ricava l'equazione delle frequenze:

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \tag{19}$$

- *Pulsazioni proprie*

  Le pulsazioni proprie si ricavano risolvendo la (19) rispetto ad ω:

$$\frac{\omega l}{c} = n\pi \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{n\pi c}{l} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{20}$$

- *Modi principali di vibrare*

  Tenendo presenti i risultati ottenuti in precedenza, l'espressione analitica dell'n-esimo modo principale di vibrare $U_n(x)$ risulta:

$$U_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{21}$$

  dove C_n rappresenta una generica costante.

Esercizio 3 - Cod. VIB-041

Calcolare le prime tre frequenze proprie relative alle vibrazioni longitudinali delle aste di acciaio riportate nelle figure seguenti:

Caso a)

Figura 1

Caso b)

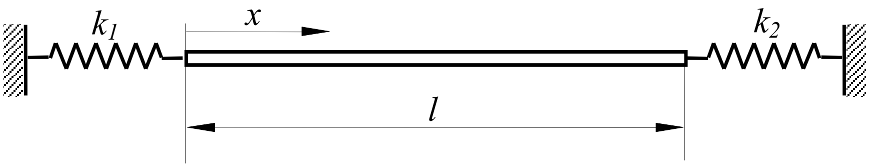


Figura 2

Dati

- Lunghezza .... $l = 1.5$ m
- Modulo di Young dell'acciaio .... $E = 206000$ N/mm^2
- Densità dell'acciaio .... $\varrho = 7800$ kg/m^3
- Diametro della sezione trasversale .... $d = 10$ mm
- Rigidezza delle molle .... $k = 3 \times 10^7$ N/m $\quad k_1 = 5 \times 10^7$ N/m $\quad k_2 = 8 \times 10^7$ N/m

Soluzione

Assumiamo per convenzione lo spostamento assiale u positivo verso destra e l'azione assiale N positiva a trazione (vedi Figura 3).

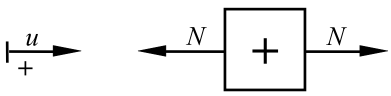


Figura 3

L'equazione delle vibrazioni assiali è la seguente:

$$u(x,t) = U(x)f(t) = \left(A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c}\right)(C\cos\omega t + D\sin\omega t) \tag{1}$$

dove

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \tag{2}$$

rappresenta la velocità di propagazione delle onde.
Esaminiamo ora separatamente i due casi.

Caso a)

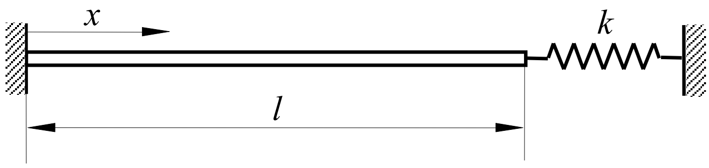


Figura 4

La condizione al contorno relativa all'estremo sinistro ($x = 0$) è:

$$u(0, t) = 0 \tag{3}$$

Imponendo tale condizione si ricava:

$$u(0, t) = Af(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0 \tag{4}$$

La condizione sull'estremo destro ($x = l$) si può ottenere esprimendo l'equilibrio delle forze agenti sull'elemento terminale dell'asta: tali forze sono rappresentate dall'azione assiale $N(l, t)$ e dalla forza elastica $ku(l, t)$ esercitata dalla molla (vedi Figura 5).

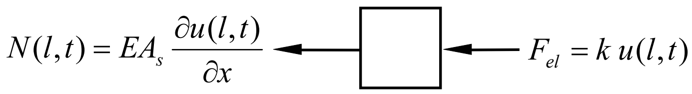


Figura 5 Estremo destro dell'asta

Se A_s indica l'area della sezione trasversale dell'asta, la condizione di equilibrio suddetta risulta:

$$EA_s \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + ku(l, t) = 0 \tag{5}$$

Tenendo conto della (4), la funzione $u(x, t)$ e la sua derivata parziale rispetto ad x risultano:

$$u(x, t) = \left(B \sin \frac{\omega x}{c}\right) f(t) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \left(\frac{\omega}{c} B \cos \frac{\omega x}{c}\right) f(t) \tag{6}$$

Sostituendo le espressioni (6), calcolate in $x = l$, nella (5) e semplificando il termine $Bf(t)$ si ricava l'equazione delle frequenze per il sistema in esame:

$$EA_s \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} + k \sin \frac{\omega l}{c} = 0 \tag{7}$$

Ponendo ora

$$\beta = \frac{\omega l}{c} = \omega l \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \tag{8}$$

l'equazione (7) può essere riscritta nella forma:

$$\tan \beta = -\frac{EA_s}{kl} \beta \tag{9}$$

L'equazione (9), risolta per via numerica, consente di ricavare i valori di corrispondenti alle pulsazioni proprie del sistema; per localizzare le soluzioni è conveniente rappresentare in forma grafica i due membri della (9):
Si osservi che, essendo $\beta > 0$, si considera solo il semiasse orizzontale positivo.
Indichiamo con β_1, β_2 e β_3 le prime tre soluzioni della (9): dal grafico sopra riportato si deduce che:

$$\frac{\pi}{2} < \beta_1 < \pi \qquad \frac{3}{2}\pi < \beta_2 < 2\pi \qquad \frac{5}{2}\pi < \beta_3 < 3\pi \tag{10}$$

Con i dati numerici forniti dal testo si ottengono i seguenti risultati:

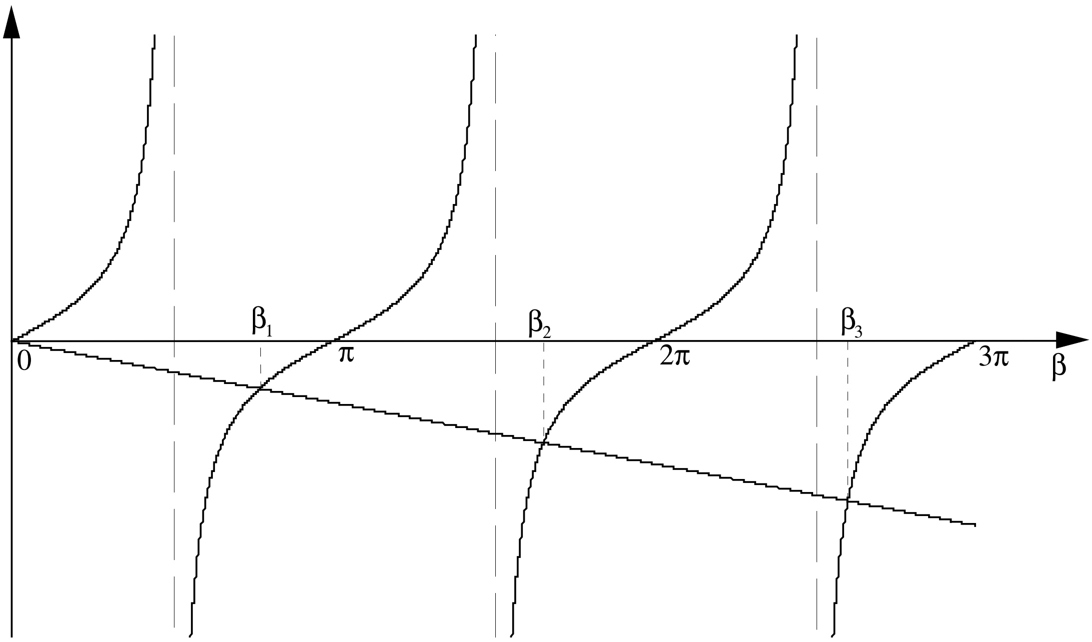


Figura 6

- Area della sezione trasversale dell'asta:

$$A_s = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 0.01^2}{4} = 7.85 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2 \tag{11}$$

- Coefficiente angolare della retta:

$$b = \frac{EA_s}{kl} = \frac{206000 \times 10^6 \times 7.85 \times 10^{-5}}{3 \times 10^7 \times 1.5} = 0.36 \tag{12}$$

Risolvendo numericamente la (9) si ottengono i valori di β sotto riportati:

$$\beta_1 = 2.425 \qquad \beta_2 = 5.203 \qquad \beta_3 = 8.182 \tag{13}$$

La velocità di propagazione delle onde si ricava dalla relazione (2):

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} = \sqrt{\frac{206000 \times 10^6}{7800}} = 5139\ \mathrm{m/s} \tag{14}$$

Le pulsazioni proprie risultano pertanto:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \beta_1 \frac{c}{l} = 2.425 \times \frac{5139}{1.5} = 8307\ \mathrm{rad/s} \\ \omega_2 &= \beta_2 \frac{c}{l} = 5.203 \times \frac{5139}{1.5} = 17827\ \mathrm{rad/s} \\ \omega_3 &= \beta_3 \frac{c}{l} = 8.182 \times \frac{5139}{1.5} = 28031\ \mathrm{rad/s} \end{aligned} \tag{15}$$

e le corrispondenti frequenze:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{8307}{2\pi} = 1322 \text{ Hz} \\
f_2 &= \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{17827}{2\pi} = 2837 \text{ Hz} \\
f_3 &= \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{28031}{2\pi} = 4461 \text{ Hz}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Caso b)

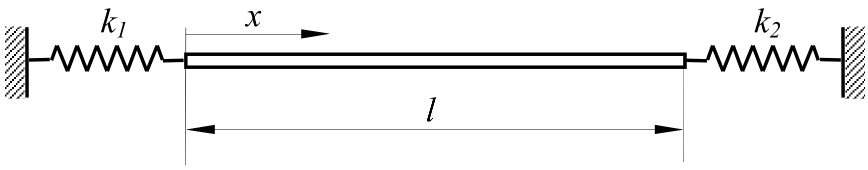


Figura 7

Le condizioni al contorno si ottengono mediante considerazioni di equilibrio per entrambi gli estremi; le forze in gioco sono evidenziate nelle figure seguenti:

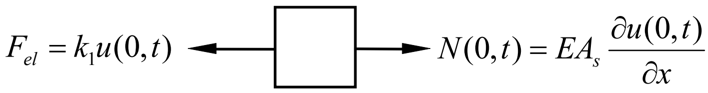


Figura 8 Estremo sinistro dell'asta.

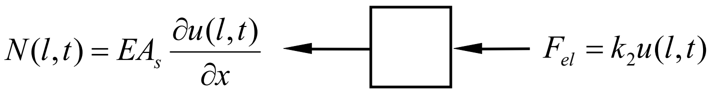


Figura 9 Estremo destro dell'asta.

Si ha pertanto:

$$
\begin{aligned}
&EA_s \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - k_1 u(0,t) = 0 \\
&EA_s \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + k_2 u(l,t) = 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

La funzione $u(x,t)$ e la sua derivata parziale rispetto ad x risultano:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \right) f(t) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \left(-\frac{\omega}{c} A \sin \frac{\omega x}{c} + \frac{\omega}{c} B \cos \frac{\omega x}{c} \right) f(t)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Dalle (17) e (18), semplificando il termine $f(t)$, si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$
\begin{cases}
EA_s \dfrac{\omega}{c} B - k_1 A = 0 \\
EA_s \left(-\dfrac{\omega}{c} A \sin \dfrac{\omega l}{c} + \dfrac{\omega}{c} B \cos \dfrac{\omega l}{c} \right) + k_2 \left(A \cos \dfrac{\omega l}{c} + B \sin \dfrac{\omega l}{c} \right) = 0
\end{cases}
\tag{19}
$$

Per determinare l'equazione delle frequenze si può ricavare la costante A dalla prima delle (19) e sostituire il valore così ottenuto nella seconda equazione; dopo alcuni passaggi algebrici si perviene al seguente risultato:

$$\tan\beta = -\frac{a\left(1+\dfrac{k_2}{k_1}\right)\beta}{k_2 - \dfrac{a^2}{k_1}\beta^2} \tag{20}$$

in cui β è dato dalla (8), mentre la costante a è definita dalla relazione:

$$a = \frac{EA_s}{l} \tag{21}$$

Possiamo osservare subito che, per $k_1 \to \infty$ e $k_2 = k$, l'equazione (20) si trasforma nella (9); ciò era prevedibile, dal momento che una molla di rigidezza infinita impedisce qualsiasi spostamento assiale e risulta pertanto equivalente ad un incastro.
Anche in questo caso l'equazione delle frequenze (20) deve essere risolta per via numerica; per localizzare le soluzioni rappresentiamo graficamente i due membri dell'equazione suddetta:

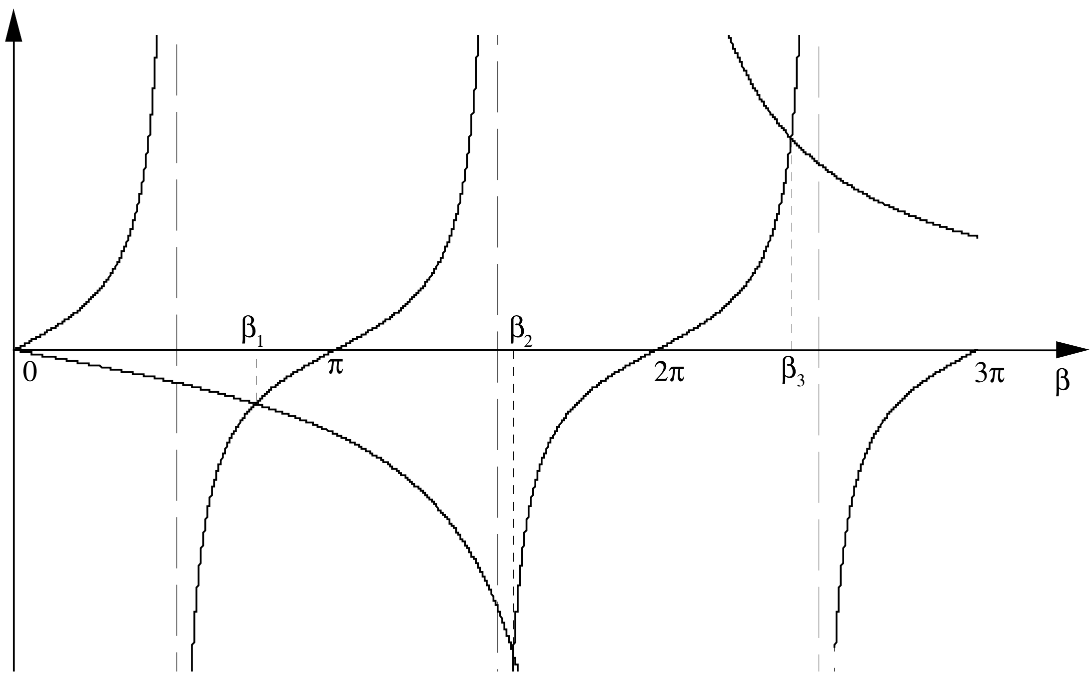


Figura 10

Indichiamo con β_1, β_2 e β_3 le prime tre soluzioni della (20): dal grafico sopra riportato si deduce che:

$$\frac{\pi}{2} < \beta_1 < \pi \qquad \frac{3}{2}\pi < \beta_2 < 2\pi \qquad 2\pi < \beta_3 < \frac{5}{2}\pi \tag{22}$$

Con i dati numerici forniti dal testo la (20) assume la seguente espressione:

$$\tan\beta = -\frac{2.804\,\beta}{8 - 0.233\,\beta^2} \tag{23}$$

Risolvendo numericamente la (20) si ottengono i valori di β sotto riportati:

$$\beta_1 = 2.362 \qquad \beta_2 = 4.888 \qquad \beta_3 = 7.604 \tag{24}$$

Le pulsazioni proprie risultano pertanto:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \beta_1 \frac{c}{l} = 2.362 \times \frac{5139}{1.5} = 8092 \text{ rad/s} \\ \omega_2 &= \beta_2 \frac{c}{l} = 4.888 \times \frac{5139}{1.5} = 16748 \text{ rad/s} \\ \omega_3 &= \beta_3 \frac{c}{l} = 7.604 \times \frac{5139}{1.5} = 26051 \text{ rad/s} \end{aligned} \tag{25}$$

e le corrispondenti frequenze:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{8092}{2\pi} = 1288 \text{ Hz} \\ f_2 &= \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{16748}{2\pi} = 2666 \text{ Hz} \\ f_3 &= \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{26051}{2\pi} = 4146 \text{ Hz} \end{aligned} \tag{26}$$

Confrontando i valori delle frequenze proprie ottenuti nei due casi, si osserva che i valori relativi al caso b) sono più bassi rispetto ai corrispondenti valori dal caso a); questo risultato era prevedibile, dal momento che la rigidezza del sistema diminuisce, passando dal caso a) al caso b), in seguito all'introduzione della seconda molla.

Esercizio 4 - Cod. VIB-042

Calcolare le prime tre frequenze proprie relative alle vibrazioni assiali di un'asta di acciaio con un estremo incastrato, alla quale è fissata una massa concentrata M in corrispondenza dell'estremo libero.

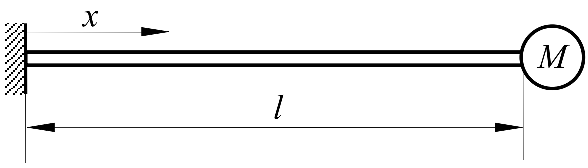


Figura 1

Dati

- Lunghezza dell'asta .... $l = 0.75$ m
- Modulo di Young dell'acciaio .... $E = 206000$ N/mm^2
- Densità dell'acciaio .... $\varrho = 7800$ kg/m^3
- Diametro della sezione trasversale dell'asta .... $d = 10$ mm
- Massa applicata all'estremità destra dell'asta .... $M = 1.5$ kg

Soluzione

Assumiamo per convenzione lo spostamento assiale u positivo verso destra e l'azione assiale N positiva a trazione (vedi Figura 2).

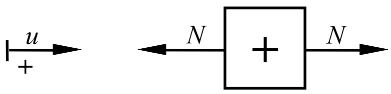


Figura 2

L'equazione delle vibrazioni assiali è la seguente:

$$u(x,t) = U(x)f(t) = \left(A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c}\right)(C\cos\omega t + D\sin\omega t) \tag{1}$$

dove

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \tag{2}$$

rappresenta la velocità di propagazione delle onde.
La condizione al contorno relativa all'estremo sinistro ($x = 0$) è:

$$u(0,t) = 0 \tag{3}$$

Imponendo tale condizione si ricava:

$$u(0,t) = Af(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0 \tag{4}$$

La condizione sull'estremo destro ($x = l$) si può ottenere esprimendo l'equilibrio delle forze agenti sulla massa concentrata; tali forze sono rappresentate dall'azione assiale $N(l,t)$ e dalla forza d'inerzia $F_i(l,t)$ generata dalla massa stessa (vedi Figura 3).
Si ha pertanto:

$$EA_s\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t) = 0 \tag{5}$$

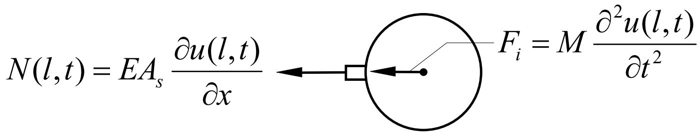


Figura 3

dove A_s indica l'area della sezione trasversale del'asta.
Poiché la costante A è nulla (vedi equazione (4)), la derivata parziale rispetto ad x della funzione $u(x,t)$ risulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{dU(x)}{dx} f(t) = \left(\frac{\omega}{c} B \cos\frac{\omega x}{c}\right) f(t) \tag{6}$$

Per quanto riguarda la derivata parziale seconda rispetto al tempo possiamo scrivere:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = U(x)\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\omega^2 U(x) f(t) = -\omega^2 \left(B \sin\frac{\omega x}{c}\right) f(t) \tag{7}$$

Sostituendo le (6) e (7), calcolate in $x = l$, nella (5) e semplificando, si ottiene l'equazione seguente:

$$\frac{EA_s}{c} \cos\frac{\omega l}{c} - M\omega \sin\frac{\omega l}{c} = 0 \tag{8}$$

Poiché risulta $E = \varrho c^2$ (vedi equazione (2)) possiamo riscrivere la (8) nella forma:

$$\frac{\varrho A_s l}{M} \cos\frac{\omega l}{c} = \frac{\omega l}{c} \sin\frac{\omega l}{c} \tag{9}$$

Si osservi che il prodotto $m = \varrho A_s l$ rappresenta la massa propria dell'asta.
Definendo ora le costanti

$$h = \frac{\varrho A_s l}{M} = \frac{m}{M} \qquad \beta = \frac{\omega l}{c} = \omega l \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \tag{10}$$

l'equazione (9) diventa:

$$\tan\beta = \frac{h}{\beta} \tag{11}$$

L'equazione (11), risolta per via numerica, fornisce i valori di β corrispondenti alle pulsazioni proprie del sistema in esame; la rappresentazione grafica dei due membri della (11) è riportata nella Figura 4:
Si noti che, essendo $\beta > 0$, si considera soltanto il semiasse orizzontale positivo.
Indichiamo con β_1, β_2 e β_3 le prime tre soluzioni della (11): dal grafico sopra riportato si deduce che:

$$0 < \beta_1 < \frac{\pi}{2} \qquad \pi < \beta_2 < \frac{3}{2}\pi \qquad 2\pi < \beta_3 < \frac{5}{2}\pi \tag{12}$$

Con i dati numerici assegnati dal problema si ha:

$$A_s = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 0.01^2}{4} = 7.85 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2 \tag{13}$$

$$h = \frac{\varrho A_s l}{M} = \frac{7800 \times 7.85 \times 10^{-5} \times 0.75}{1.5} = 0.306 \tag{14}$$

$$\beta_1 = 0.527 \qquad \beta_2 = 3.236 \qquad \beta_3 = 6.332 \tag{15}$$

La velocità di propagazione delle onde si ricava dalla relazione (2):

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} = \sqrt{\frac{206000 \times 10^6}{7800}} = 5139\ \mathrm{m/s} \tag{16}$$

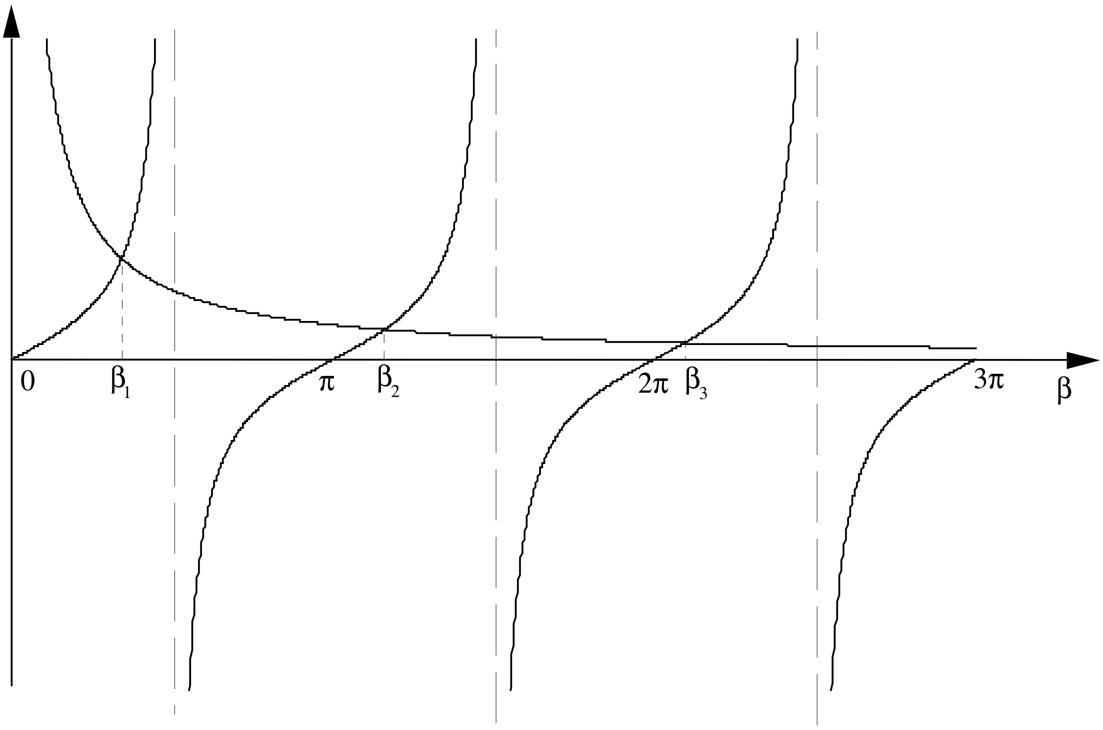


Figura 4

Le pulsazioni proprie risultano pertanto:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \beta_1 \frac{c}{l} = 0.527 \times \frac{5139}{0.75} = 3609 \text{ rad/s} \\
\omega_2 &= \beta_2 \frac{c}{l} = 3.236 \times \frac{5139}{0.75} = 22173 \text{ rad/s} \\
\omega_3 &= \beta_3 \frac{c}{l} = 6.332 \times \frac{5139}{0.75} = 43384 \text{ rad/s}
\end{aligned} \tag{17}$$

e le corrispondenti frequenze:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{3609}{2\pi} = 574 \text{ Hz} \\
f_2 &= \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{22173}{2\pi} = 3529 \text{ Hz} \\
f_3 &= \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{43384}{2\pi} = 6905 \text{ Hz}
\end{aligned} \tag{18}$$

Se si trascura la massa dell'asta, si ottiene un sistema ad un solo grado di libertà del tipo illustrato in Figura 5:

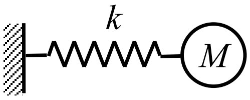


Figura 5

La costante elastica k rappresenta la rigidezza assiale dell'asta e vale:

$$k = \frac{EA_s}{l} \tag{19}$$

La pulsazione propria è pertanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{EA_s}{Ml}} = \sqrt{\frac{206000 \times 10^6 \times 7.85 \times 10^{-5}}{1.5 \times 0.75}} = 3792 \text{ rad/s} \tag{20}$$

L'errore percentuale commesso sul calcolo della prima frequenza propria è:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \times 100 == \frac{3792 - 3609}{3609} \times 100 \cong 5\% \tag{21}$$

Esercizio 5 - Cod. VIB-043

Si considerino le vibrazioni torsionali di un'asta omogenea di lunghezza l, avente sezione trasversale uniforme con momento d'inerzia polare J_p, vincolata nei modi indicati in Figura 1:

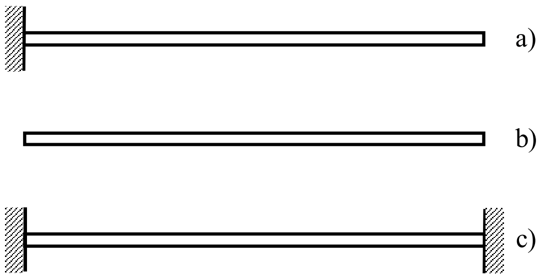


Figura 1 Condizioni di vincolo: a) incastro - estremo libero; b)estremo libero - estremo libero; c) incastro - incastro.

Siano ϱ e G rispettivamente la densità ed il modulo di elasticità tangenziale del materiale costituente l'asta; per ciascuna delle condizioni di vincolo specificate si chiede di determinare:

- le condizioni al contorno;
- l'equazione delle frequenze;
- le pulsazioni proprie;
- i modi principali di vibrare.

Soluzione

Indicando con $\vartheta(x,t)$ la rotazione di una generica sezione dell'asta, l'equazione delle vibrazioni torsionali risulta:

$$\vartheta(x,t) = \Theta(x) f(t) = \left(A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c} \right)(C\cos\omega t + D\sin\omega t) \tag{1}$$

dove

$$c = \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \tag{2}$$

rappresenta la velocità di propagazione dell'onda lungo l'asta.
Esaminiamo ora le condizioni di vincolo sopra riportate.

Caso a): Incastro - estremo libero

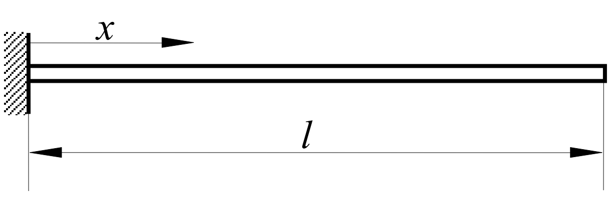


Figura 2

- *Condizioni al contorno*

  In $x = 0$ la rotazione è nulla, quindi:

$$\vartheta(0,t) = 0 \tag{3}$$

  In $x = l$ il momento torcente M_t è nullo, quindi:

$$M_t(l,t) = GJ_p \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(l,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(l,t) = 0 \tag{4}$$

- *Equazione delle frequenze*

  Per ricavare l'equazione delle frequenze applichiamo le condizioni al contorno sopra riportate:

$$\vartheta(x,t) = \left(A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c}\right) f(t) \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta(0,t) = Af(t) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}(x,t) = \left(-\frac{\omega}{c}A\sin\frac{\omega x}{c} + \frac{\omega}{c}B\cos\frac{\omega x}{c}\right) f(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial x}(l,t) = \left(\frac{\omega}{c}B\cos\frac{\omega l}{c}\right) f(t) = 0 \tag{6}$$

  Dalla (5) si deduce che deve essere $A = 0$, mentre dalla (6) si ricava l'equazione delle frequenze:

$$\cos\frac{\omega l}{c} = 0 \tag{7}$$

- *Pulsazioni proprie*

  Le pulsazioni proprie si ricavano risolvendo la (7) rispetto ad ω:

$$\frac{\omega l}{c} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{(2n+1)\pi c}{2l} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

- *Modi principali di vibrare*

  Tenendo presenti i risultati ottenuti in precedenza, l'espressione analitica dell' n-esimo modo principale di vibrare $\Theta_n(x)$ risulta:

$$\Theta_n(x) = C_n \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \tag{9}$$

  dove C_n rappresenta una generica costante.

Caso b): Estremo libero - estremo libero

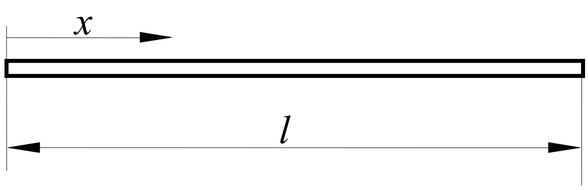


Figura 3

- *Condizioni al contorno*

  In $x = 0$ il momento torcente M_t è nullo, quindi:

$$M_t(0,t) = GJ_p\frac{\partial\vartheta}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial x}(0,t) = 0 \tag{10}$$

  In $x = l$ il momento torcente M_t è nullo, quindi:

$$M_t(l,t) = GJ_p\frac{\partial\vartheta}{\partial x}(l,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial x}(l,t) = 0 \tag{11}$$

- *Equazione delle frequenze*

  Per ricavare l'equazione delle frequenze applichiamo le condizioni al contorno sopra riportate:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}(x,t) = \left(-\frac{\omega}{c}A\sin\frac{\omega x}{c} + \frac{\omega}{c}B\cos\frac{\omega x}{c}\right) f(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial\vartheta}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\omega}{c}Bf(t) = 0 \\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial x}(l,t) = \left(-\dfrac{\omega}{c}A\sin\dfrac{\omega l}{c} + \dfrac{\omega}{c}B\cos\dfrac{\omega l}{c}\right) f(t) = 0 \end{array} \tag{12}$$

  Dalla prima delle (12) si ottiene $B = 0$, mentre dalla seconda si ricava l'equazione delle frequenze:

$$\sin\frac{\omega l}{c} = 0 \tag{13}$$

- *Pulsazioni proprie*

  Le pulsazioni proprie si ricavano risolvendo la (13) rispetto ad ω:

$$\frac{\omega l}{c} = n\pi \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{n\pi c}{l} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

- *Modi principali di vibrare*

  Tenendo presenti i risultati ottenuti in precedenza, l'espressione analitica dell' n-esimo modo principale di vibrare $\Theta_n(x)$ risulta:

$$\Theta_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l} \tag{15}$$

  dove C_n rappresenta una generica costante.

Caso c): Incastro - incastro

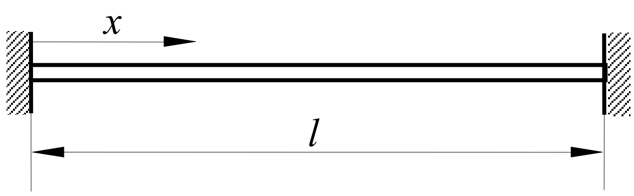


Figura 4

- *Condizioni al contorno*

  In $x = 0$ lo spostamento è nullo, quindi:

$$\vartheta(0, t) = 0 \tag{16}$$

  In $x = l$ lo spostamento è nullo, quindi:

$$\vartheta(l, t) = 0 \tag{17}$$

- *Equazione delle frequenze*

  Per ricavare l'equazione delle frequenze applichiamo le condizioni al contorno sopra riportate:

$$\vartheta(x,t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}\right) f(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \vartheta(0,t) = A f(t) = 0 \\ \vartheta(l,t) = \left(A \cos \dfrac{\omega l}{c} + B \sin \dfrac{\omega l}{c}\right) f(t) = 0 \end{array} \tag{18}$$

  Dalla prima delle (18) si ottiene $A = 0$, mentre dalla seconda si ricava l'equazione delle frequenze:

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \tag{19}$$

- *Pulsazioni proprie*

  Le pulsazioni proprie si ricavano risolvendo la (19) rispetto ad ω:

$$\frac{\omega l}{c} = n\pi \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{n\pi c}{l} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{20}$$

- *Modi principali di vibrare*

  Tenendo presenti i risultati ottenuti in precedenza, l'espressione analitica dell'n-esimo modo principale di vibrare $\Theta_n(x)$ risulta:

$$\Theta_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{21}$$

  dove C_n rappresenta una generica costante.

Esercizio 6 - Cod. VIB-044

Calcolare le prime tre frequenze proprie relative alle vibrazioni torsionali di un'asta di acciaio con un estremo incastrato, alla quale è fissato un disco di momento d'inerzia J_D in corrispondenza dell'estremo libero.

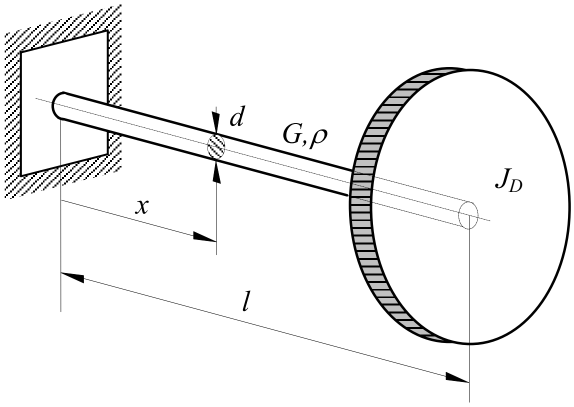


Figura 1

Dati

- Lunghezza dell'asta .... $l = 1.2$ m
- Modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio .... $G = 80000$ N/mm^2
- Densità dell'acciaio .... $\varrho = 7800$ kg/m^3
- Diametro della sezione trasversale dell'asta .... $d = 20$ mm
- Momento d'inerzia del disco applicato all'estremità libera dell'asta .... $J_D = 2.25 \times 10^{-4}$ kg m^2

Soluzione

Per la risoluzione del problema adottiamo le convenzioni di segno indicate nella Figura 2:

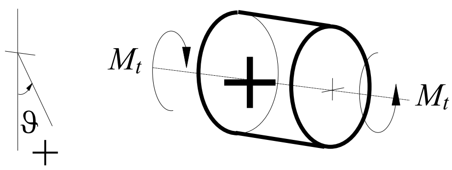


Figura 2

L'equazione delle vibrazioni torsionali è la seguente:

$$\vartheta(x,t) = \Theta(x) f(t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}\right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t) \tag{1}$$

dove

$$c = \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \tag{2}$$

rappresenta la velocità di propagazione delle onde.
La condizione al contorno relativa all'estremo incastrato ($x = 0$) è:

$$\vartheta(0,t) = 0 \tag{3}$$

Imponendo tale condizione si ricava:

$$\vartheta(0,t) = Af(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0 \tag{4}$$

La condizione sull'altro estremo ($x = l$) si può ottenere esprimendo l'equilibrio delle coppie agenti sul disco; tali coppie sono rappresentate dal momento torcente $M_t(l,t)$ e dalla coppia d'inerzia $C_i(l,t)$ generata dal disco stesso (vedi Figura 3).

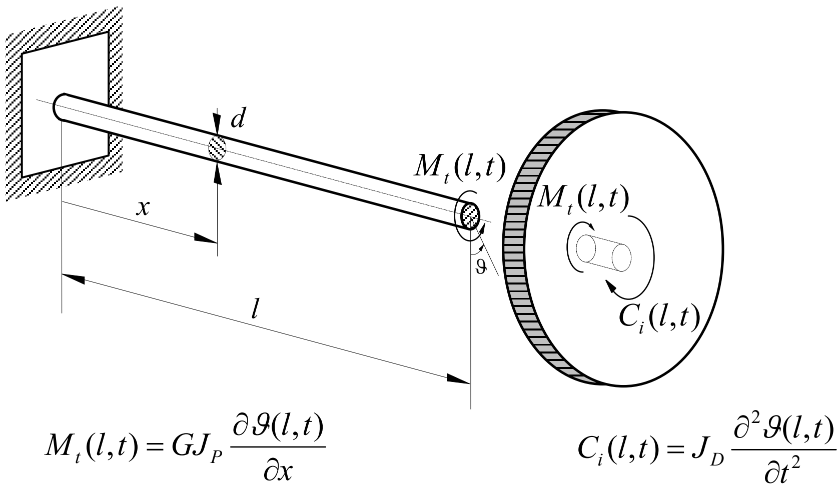


Figura 3

Si ha pertanto:

$$GJ_p \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(l,t) + J_D \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}(l,t) = 0 \tag{5}$$

dove J_p indica il momento d'inerzia polare della sezione trasversale del'asta.
Poiché la costante A è nulla (vedi equazione (4)), la derivata parziale rispetto ad x della funzione $\vartheta(x,t)$ risulta:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}(x,t) = \frac{d\Theta(x)}{dx} f(t) = \left(\frac{\omega}{c} B \cos \frac{\omega x}{c} \right) f(t) \tag{6}$$

Per quanto riguarda la derivata parziale seconda rispetto al tempo possiamo scrivere:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}(x,t) = \Theta(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\omega^2 \Theta(x) f(t) = -\omega^2 \left(B \sin \frac{\omega x}{c} \right) f(t) \tag{7}$$

Sostituendo le (6) e (7), calcolate in $x = l$, nella (5) e semplificando, si ottiene l'equazione seguente:

$$\frac{GJ_p}{c} \cos \frac{\omega l}{c} - J_D \omega \sin \frac{\omega l}{c} = 0 \tag{8}$$

Poiché risulta $G = \varrho c^2$ (vedi equazione (2)) possiamo riscrivere la (8) nella forma:

$$\frac{\varrho J_p l}{J_D} \cos \frac{\omega l}{c} = \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega l}{c} \tag{9}$$

Si osservi che il momento d'inerzia di massa dell'asta attorno al proprio asse risulta pari a[2]:

$$J_{asta} = \varrho J_p l \tag{10}$$

Ponendo:

$$h = \frac{\varrho J_p l}{J_D} = \frac{J_{asta}}{J_D} \qquad \beta = \frac{\omega l}{c} = \omega l \sqrt{\frac{\varrho}{G}} \tag{11}$$

l'equazione (9) diventa:

$$\tan \beta = \frac{h}{\beta} \tag{12}$$

L'equazione (12), risolta per via numerica, fornisce i valori di β corrispondenti alle pulsazioni proprie del sistema in esame; la rappresentazione grafica dei due membri della (12) è riportata nella Figura 4:

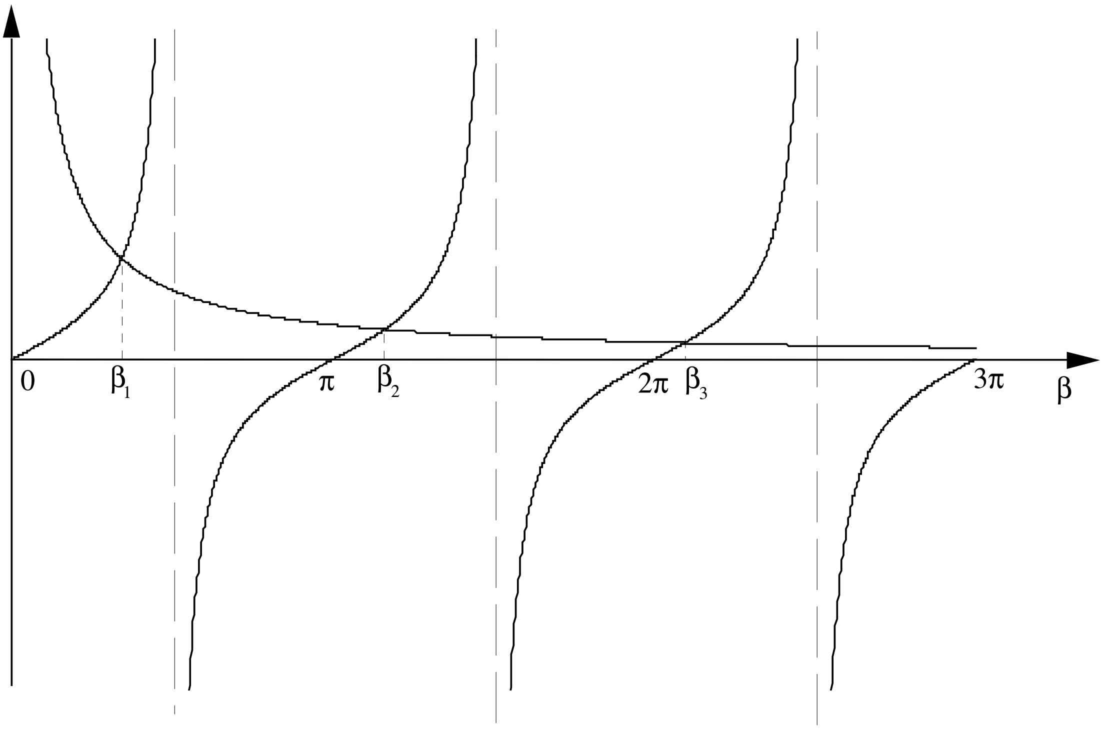


Figura 4

Si noti che, essendo $\beta > 0$, si considera soltanto il semiasse orizzontale positivo.
Indichiamo con β_1, β_2 e β_3 le prime tre soluzioni della (12): dal grafico sopra riportato si deduce che:

$$0 < \beta_1 < \frac{\pi}{2} \qquad \pi < \beta_2 < \frac{3}{2}\pi \qquad 2\pi < \beta_3 < \frac{5}{2}\pi \tag{13}$$

[2]Applicando la definizione, il momento d'inerzia polare della sezione dell'asta vale:

$$J_p = \int_A r^2 dA \qquad [\mathrm{m}^4]$$

Sempre applicando la definizione, il momento d'inerzia di massa dell'asta vale:

$$J_{asta} = \int_m r^2 dm = \varrho l \int_A r^2 dA = \varrho l J_p \qquad [\mathrm{kg\,m}^2]$$

essendo $dm = \varrho\, dV = \varrho l\, dA$ (m = massa, V = volume, A = area).
Per una sezione circolare di diametro d il momento d'inerzia polare vale:

$$J_p = \int_A r^2 dA = \int_0^{d/2} r^2\, 2\pi r\, dr = \frac{\pi d^4}{32}$$

Con i dati numerici assegnati dal problema si ha:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 0.02^2}{32} = 1.571 \times 10^{-8}\ \mathrm{m}^4 \tag{14}$$

$$h = \frac{\varrho J_p l}{J_D} = \frac{7800 \times 1.571 \times 10^{-8} \times 1.2}{2.25 \times 10^{-4}} = 0.653 \tag{15}$$

$$\beta_1 = 0.730 \qquad \beta_2 = 3.335 \qquad \beta_3 = 6.385 \tag{16}$$

La velocità di propagazione delle onde si ricava dalla relazione (2):

$$c = \sqrt{\frac{G}{\varrho}} = \sqrt{\frac{80000 \times 10^6}{7800}} = 3203\ \mathrm{m/s} \tag{17}$$

Le pulsazioni proprie risultano pertanto:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \beta_1 \frac{c}{l} = 0.730 \times \frac{3203}{1.2} = 1948\ \mathrm{rad/s} \\ \omega_2 &= \beta_2 \frac{c}{l} = 3.335 \times \frac{3203}{1.2} = 8901\ \mathrm{rad/s} \\ \omega_3 &= \beta_3 \frac{c}{l} = 6.385 \times \frac{3203}{1.2} = 17041\ \mathrm{rad/s} \end{aligned} \tag{18}$$

e le corrispondenti frequenze:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1948}{2\pi} = 310\ \mathrm{Hz} \\ f_2 &= \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{8901}{2\pi} = 1417\ \mathrm{Hz} \\ f_3 &= \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{17041}{2\pi} = 2712\ \mathrm{Hz} \end{aligned} \tag{19}$$

Se si trascura la massa dell'asta, si ottiene un sistema ad un solo grado di libertà del tipo illustrato in Figura 5 (disco incernierato a terra soggetto alla coppia generata da una molla torsionale).

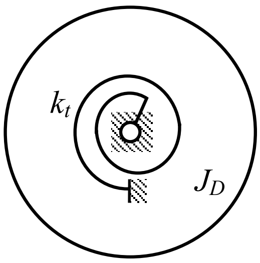


Figura 5

La costante elastica k_t rappresenta la rigidezza torsionale dell'asta e vale:

$$k = \frac{G J_p}{l} \tag{20}$$

La pulsazione propria è pertanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_t}{J_D}} = \sqrt{\frac{G J_p}{J_D l}} = \sqrt{\frac{80000 \times 10^6 \times 1.571 \times 10^{-8}}{2.25 \times 10^{-4} \times 1.2}} = 2157\ \mathrm{rad/s} \tag{21}$$

L'errore percentuale commesso sul calcolo della prima frequenza propria è:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \times 100 = \frac{2157 - 1948}{1948} \times 100 \cong 10.7\% \tag{22}$$

Esercizio 7 - Cod. VIB-045

Calcolare le prime tre pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare relativi alle vibrazioni trasversali della trave sotto riportata.

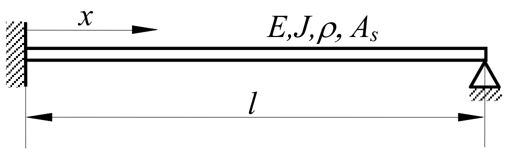


Figura 1

Soluzione

Indichiamo con:

$y(x,t)$	lo spostamento verticale di una generica sezione della trave;
$\varphi(x,t)$	la rotazione di una generica sezione della trave;
$M(x,t)$	il momento flettente agente in una generica sezione della trave;
$T(x,t)$	la forza di taglio in una generica sezione della trave.

Per la risoluzione del problema adottiamo le convenzioni di segno indicate in Figura 2:

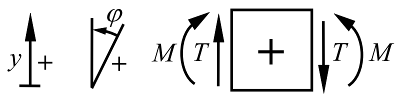


Figura 2

L'equazione delle vibrazioni trasversali è la seguente:

$$y(x,t) = Y(x)f(t) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x)(E\cos\omega t + F\sin\omega t) \tag{1}$$

dove:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \varrho A_s}{EJ}} \tag{2}$$

Le condizioni al contorno relative all'estremo incastrato ($x = 0$) sono:

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ \varphi(0,t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Le condizioni al contorno relative all'estremo appoggiato ($x = l$) sono invece:

$$\begin{cases} M(l,t) = EJ\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = 0 \\ y(l,t) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Per imporre le condizioni suddette occorre effettuare il calcolo delle derivate parziali rispetto ad x (prima e seconda) della funzione $y(x,t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \beta(-A\sin\beta x + B\cos\beta x + C\sinh\beta x + D\cosh\beta x)f(t) \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \beta^2(-A\cos\beta x - B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x)f(t) \tag{6}$$

Utilizzando ora le espressioni di $y(x,t)$ e delle sue derivate nelle condizioni al contorno (3) e (4), si ottiene, dopo opportune semplificazioni, il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ -A\cos\beta l - B\sin\beta l + C\cosh\beta l + D\sinh\beta l = 0 \\ A\cos\beta l + B\sin\beta l + C\cosh\beta l + D\sinh\beta l = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Ricavando dalle prime due equazioni del sistema (7) i valori delle costanti C e D e sostituendoli nelle rimanenti equazioni, si perviene al seguente sistema:

$$\begin{cases} A(\cos\beta l + \cosh\beta l) + B(\sin\beta l + \sinh\beta l) = 0 \\ A(\cos\beta l - \cosh\beta l) + B(\sin\beta l - \sinh\beta l) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Affinché tale sistema abbia una soluzione non banale è necessario che sia nullo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} (\cos\beta l + \cosh\beta l) & (\sin\beta l + \sinh\beta l) \\ (\cos\beta l - \cosh\beta l) & (\sin\beta l - \sinh\beta l) \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Ponendo, per semplicità $\alpha = \beta l$ e sviluppando il determinante, si ricava, dopo semplici passaggi, l'equazione delle frequenze sotto riportata:

$$\cos\alpha\,\sinh\alpha - \sin\alpha\,\cosh\alpha = 0 \tag{10}$$

ovvero:

$$\tanh\alpha = \tan\alpha \tag{11}$$

L'equazione (11), risolta per via numerica, fornisce i valori di α corrispondenti alle pulsazioni proprie del sistema in esame; la rappresentazione grafica dei due membri della (11) è riportata in Figura 3:

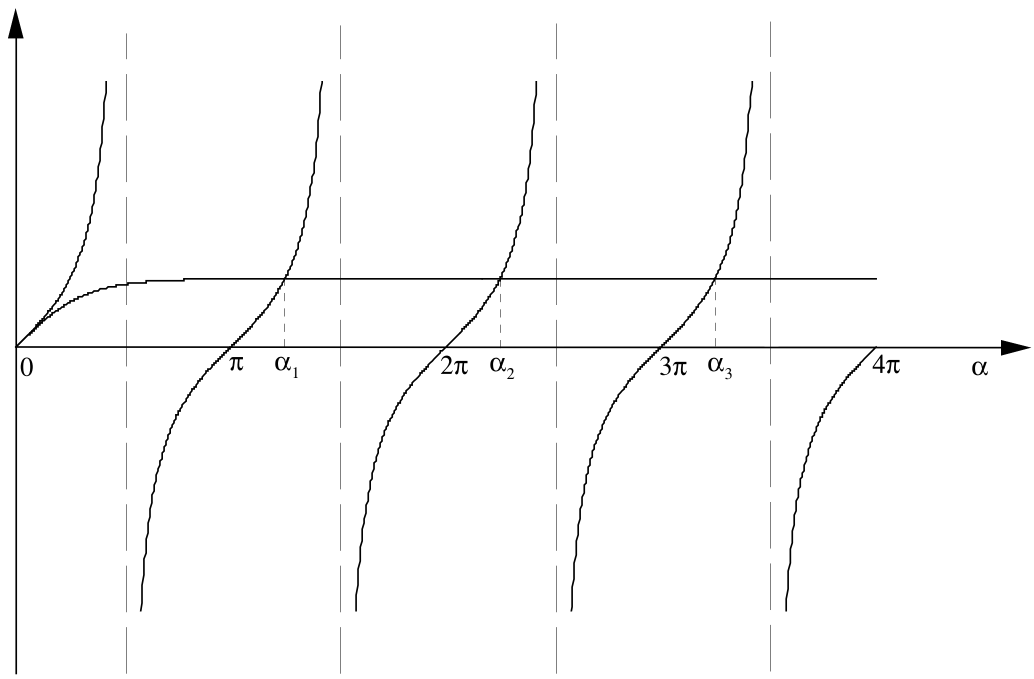


Figura 3

Si noti che, essendo $\alpha > 0$, si considera soltanto il semiasse orizzontale positivo.
Indichiamo con α_1, α_2 e α_3 le prime tre soluzioni della (11): dal grafico sopra riportato si deduce che:

$$\pi < \alpha_1 < \frac{3}{2}\pi \qquad 2\pi < \alpha_2 < \frac{5}{2}\pi \qquad 3\pi < \alpha_3 < \frac{7}{2}\pi \tag{12}$$

La soluzione numerica della (11) fornisce i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 l = 3.927 \\ \alpha_2 &= \beta_2 l = 7.069 \\ \alpha_3 &= \beta_3 l = 10.21 \end{aligned} \tag{13}$$

Le pulsazioni proprie si ricavano risolvendo la (2) rispetto ad ω:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{\varrho A_s}} \qquad n = 1.2.3.\ldots \tag{14}$$

Per il calcolo dei modi principali di vibrare possiamo procedere come segue:

- ricaviamo la costante B dalla seconda delle (8):

$$B = -A\left(\frac{\cos\beta l - \cosh\beta l}{\sin\beta l - \sinh\beta l}\right) \tag{15}$$

- riscriviamo l'espressione di $Y(x)$ tenendo presente che $C = -A$ e $D = -B$:

$$Y(x) = A(\cos\beta x - \cosh\beta x) + B(\sin\beta x - \sinh\beta x) \tag{16}$$

- sostituiamo la (15) nella (16):

$$Y(x) = A\left[(\cos\beta x - \cosh\beta x) - \left(\frac{\cos\beta l - \cosh\beta l}{\sin\beta l - \sinh\beta l}\right)(\sin\beta x - \sinh\beta x)\right] \tag{17}$$

Con riferimento all' n-esimo modo di vibrare potremo quindi scrivere:

$$Y_n(x) = A_n\left[(\cos\beta_n x - \cosh\beta_n x) - \left(\frac{\cos\beta_n l - \cosh\beta_n l}{\sin\beta_n l - \sinh\beta_n l}\right)(\sin\beta_n x - \sinh\beta_n x)\right] \tag{18}$$

$$y_n(x,t) = Y_n(x) f_n(t) = Y_n(x)(E_n \cos\omega_n t + F_n \sin\omega_n t) \tag{19}$$

Nelle figure seguenti sono rappresentate le deformate della trave relative ai primi tre modi di vibrare.

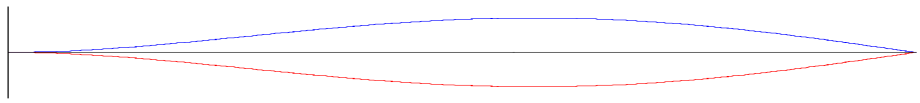


Figura 4: Primo modo di vibrare.

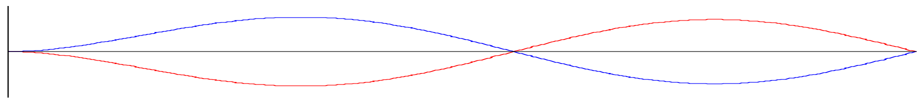


Figura 5: Secondo modo di vibrare.

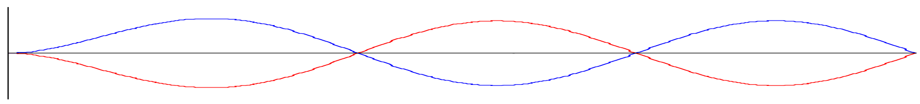


Figura 6: Terzo modo di vibrare.

Esercizio 8 - Cod. VIB-046

Calcolare le prime tre pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare relativi alle vibrazioni trasversali della trave sotto riportata.

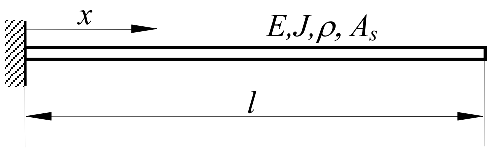


Figura 1

Soluzione

Indichiamo con:

$y(x,t)$	lo spostamento verticale di una generica sezione della trave;
$\varphi(x,t)$	la rotazione di una generica sezione della trave;
$M(x,t)$	il momento flettente agente in una generica sezione della trave;
$T(x,t)$	la forza di taglio in una generica sezione della trave.

Per la risoluzione del problema adottiamo le convenzioni di segno indicate in Figura 2:

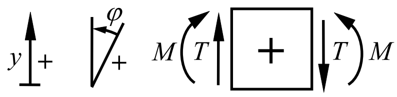


Figura 2

L'equazione delle vibrazioni trasversali è la seguente:

$$y(x,t) = Y(x)f(t) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x)(E\cos\omega t + F\sin\omega t) \tag{1}$$

dove:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \varrho A_s}{EJ}} \tag{2}$$

Le condizioni al contorno relative all'estremo incastrato ($x = 0$) sono:

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ \varphi(0,t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Le condizioni al contorno relative all'estremo libero ($x = l$) sono invece:

$$\begin{cases} M(l,t) = EJ\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = 0 \\ T(l,t) = EJ\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l,t) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Per imporre le condizioni suddette occorre effettuare il calcolo delle derivate parziali rispetto ad x (prima, seconda e terza) della funzione $y(x,t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \beta(-A\sin\beta x + B\cos\beta x + C\sinh\beta x + D\cosh\beta x)f(t) \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \beta^2(-A\cos\beta x - B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x)f(t) \tag{6}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x,t) = \beta^3(A\sin\beta x - B\cos\beta x + C\sinh\beta x + D\cosh\beta x)f(t) \tag{7}$$

Utilizzando ora le espressioni di $y(x,t)$ e delle sue derivate nelle condizioni al contorno (3) e (4), si ottiene, dopo opportune semplificazioni, il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ -A\cos\beta l - B\sin\beta l + C\cosh\beta l + D\sinh\beta l = 0 \\ A\sin\beta l - B\cos\beta l + C\sinh\beta l + D\cosh\beta l = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Ricavando dalle prime due equazioni del sistema (8) i valori delle costanti C e D e sostituendoli nelle rimanenti equazioni, si perviene al seguente sistema:

$$\begin{cases} A(\cos\beta l + \cosh\beta l) + B(\sin\beta l + \sinh\beta l) = 0 \\ A(\sin\beta l - \sinh\beta l) - B(\cos\beta l + \cosh\beta l) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Affinché tale sistema abbia una soluzione non banale è necessario che sia nullo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} (\cos\beta l + \cosh\beta l) & (\sin\beta l + \sinh\beta l) \\ (\sin\beta l - \sinh\beta l) & -(\cos\beta l + \cosh\beta l) \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

Ponendo, per semplicità $\alpha = \beta l$ e sviluppando il determinante, si ricava, dopo semplici passaggi, l'equazione delle frequenze sotto riportata:

$$1 + \cos\alpha\,\cosh\alpha = 0 \tag{11}$$

ovvero:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\cosh\alpha} \tag{12}$$

L'equazione (12), risolta per via numerica, fornisce i valori di α corrispondenti alle pulsazioni proprie del sistema in esame; la rappresentazione grafica dei due membri della (12) è riportata in Figura 3:

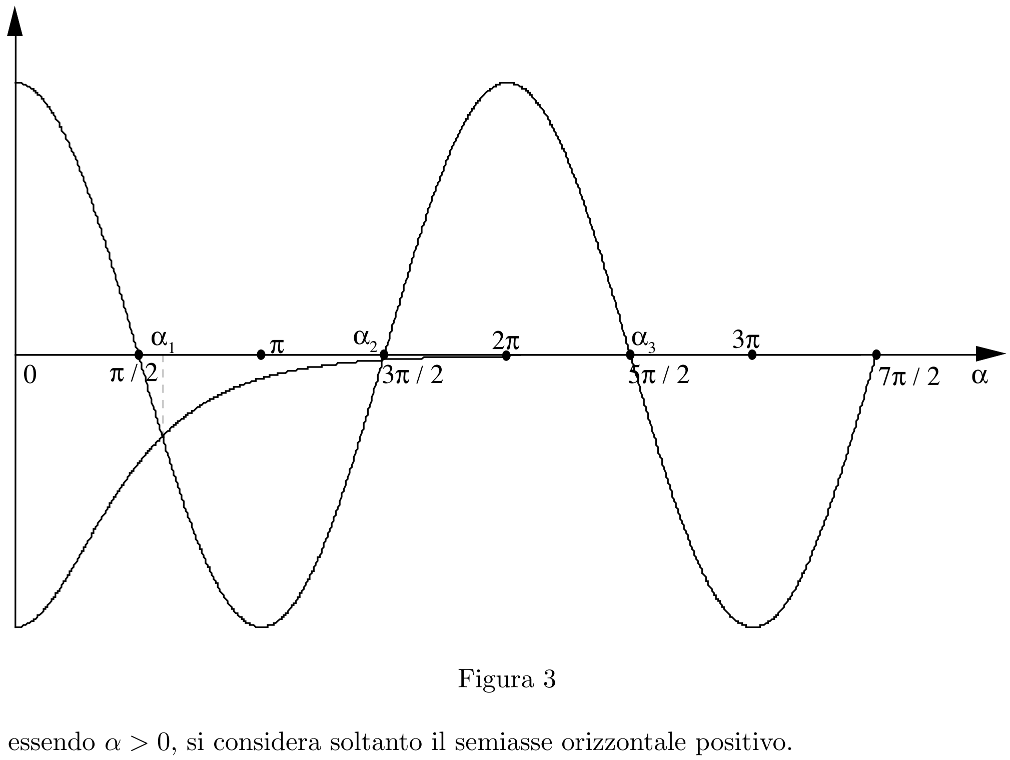


Figura 3

Si noti che, essendo $\alpha > 0$, si considera soltanto il semiasse orizzontale positivo.
Indichiamo con α_1, α_2 e α_3 le prime tre soluzioni della (12): dal grafico sopra riportato si deduce che:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \pi \qquad \alpha_2 \cong \frac{3}{2}\pi \qquad \alpha_3 \cong \frac{5}{2}\pi \tag{13}$$

La soluzione numerica della (12) fornisce i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 l = 1.875 \\ \alpha_2 &= \beta_2 l = 4.694 \\ \alpha_3 &= \beta_3 l = 7.854 \end{aligned} \tag{14}$$

Le pulsazioni proprie si ricavano risolvendo la (2) rispetto ad ω:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{\varrho A_s}} \qquad n = 1.2.3.\dots \tag{15}$$

Per il calcolo dei modi principali di vibrare possiamo procedere come segue:

- ricaviamo la costante B dalla seconda delle (9):

$$B = A\left(\frac{\sin\beta l - \sinh\beta l}{\cos\beta l + \cosh\beta l}\right) \tag{16}$$

- riscriviamo l'espressione di $Y(x)$ tenendo presente che $C = -A$ e $D = -B$:

$$Y(x) = A(\cos\beta x - \cosh\beta x) + B(\sin\beta x - \sinh\beta x) \tag{17}$$

- sostituiamo la (16) nella (17):

$$Y(x) = A\left[(\cos\beta x - \cosh\beta x) + \left(\frac{\sin\beta l - \sinh\beta l}{\cos\beta l + \cosh\beta l}\right)(\sin\beta x - \sinh\beta x)\right] \tag{18}$$

Con riferimento all' n-esimo modo di vibrare potremo quindi scrivere:

$$Y_n(x) = A_n\left[(\cos\beta_n x - \cosh\beta_n x) + \left(\frac{\sin\beta_n l - \sinh\beta_n l}{\cos\beta_n l + \cosh\beta_n l}\right)(\sin\beta_n x - \sinh\beta_n x)\right] \tag{19}$$

$$y_n(x,t) = Y_n(x) f_n(t) = Y_n(x)(E_n\cos\omega_n t + F_n \sin\omega_n t) \tag{20}$$

Nelle figure seguenti sono rappresentate le deformate della trave relative ai primi tre modi di vibrare.

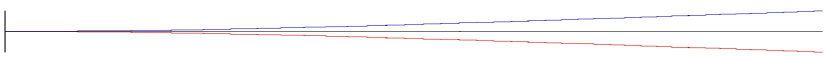


Figura 4: Primo modo di vibrare.

Figura 5: Secondo modo di vibrare.

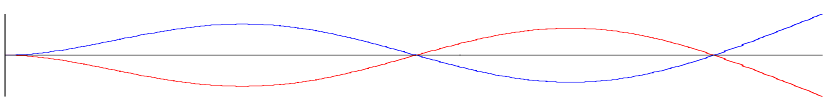


Figura 6: Terzo modo di vibrare.

Esercizio 9 - Cod. VIB-047

Calcolare le pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare relativi alle vibrazioni trasversali della trave sotto riportata.

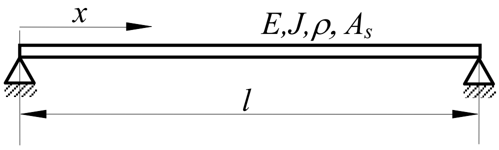


Figura 1

Soluzione

Indichiamo con: Per la risoluzione del problema adottiamo le convenzioni di segno indicate in Figura 2:

$y(x,t)$	lo spostamento verticale di una generica sezione della trave;
$\varphi(x,t)$	la rotazione di una generica sezione della trave;
$M(x,t)$	il momento flettente agente in una generica sezione della trave;
$T(x,t)$	la forza di taglio in una generica sezione della trave.

L'equazione delle vibrazioni trasversali è la seguente:

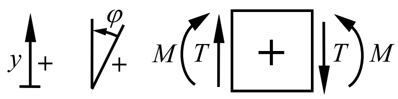


Figura 2

$$y(x,t) = Y(x)f(t) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x)(E\cos\omega t + F\sin\omega t) \tag{1}$$

dove:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \varrho A_s}{EJ}} \tag{2}$$

Le condizioni al contorno relative all'estremo sinistro ($x = 0$) sono:

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ M(0,t) = EJ\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Analogamente, per l'estremo destro ($x = l$) si ha:

$$\begin{cases} y(l,t) = 0 \\ M(l,t) = EJ\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Per imporre le condizioni suddette occorre effettuare il calcolo della derivata parziale seconda rispetto ad x della funzione $y(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \beta^2(-A\cos\beta x - B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x)f(t) \tag{5}$$

Utilizzando ora le equazioni (1) e (5) nelle condizioni al contorno (3) e (4), si ottiene, dopo opportune semplificazioni, il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + C = 0 \\ A\cos\beta l + B\sin\beta l + C\cosh\beta l + D\sinh\beta l = 0 \\ -A\cos\beta l - B\sin\beta l + C\cosh\beta l + D\sinh\beta l = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Dalle prime due equazioni del sistema (6) si deduce che $A = C = 0$; le rimanenti equazioni possono quindi essere riscritte nella forma:

$$\begin{cases} B \sin \beta l + D \sinh \beta l = 0 \\ -B \sin \beta l + D \sinh \beta l = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Affinché tale sistema abbia una soluzione non banale è necessario che sia nullo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} \sin \beta l & \sinh \beta l \\ -\sin \beta l & \sinh \beta l \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

Sviluppando il determinante e semplificando si ottiene:

$$\sin \beta l \sinh \beta l = 0 \tag{9}$$

Poiché risulta $\sinh \beta l \neq 0$ per $\beta l \neq 0$, la (11) dà luogo all'equazione delle frequenze sotto riportata:

$$\sin \beta l = 0 \tag{10}$$

I valori di β che soddisfano la (10) sono:

$$\beta_n = \frac{n\pi}{l} \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{11}$$

Come si può notare, l'equazione delle frequenze risulta in questo caso particolarmente semplice: non è quindi necessario ricorrere a metodi numerici per la determinazione delle sue radici.
Le pulsazioni proprie si ricavano risolvendo la (2) rispetto ad ω:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{\varrho A_s}} \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{12}$$

Sommando membro a membro le due equazioni del sistema (7) si può immediatamente verificare che la costante D deve essere nulla; Poiché anche le costanti A e C risultano nulle, possiamo scrivere:

$$Y(x) = B \sin \beta x \tag{13}$$

Con riferimento all' n-esimo modo di vibrare si ha pertanto:

$$Y_n(x) = B_n \sin \beta_n x \tag{14}$$

$$y_n(x,t) = Y_n(x) f_n(t) = Y_n(x)(E_n \cos \omega_n t + F_n \sin \omega_n t) \tag{15}$$

Nelle figure seguenti sono rappresentate le deformate della trave relative ai primi tre modi di vibrare.

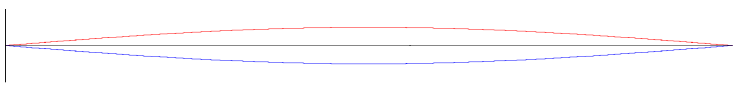


Figura 3: Primo modo di vibrare.

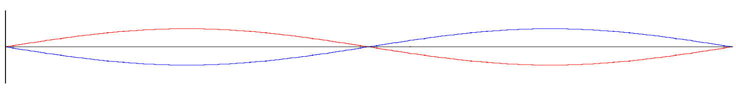


Figura 4: Secondo modo di vibrare.

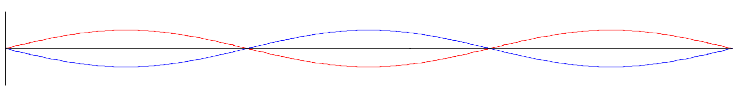


Figura 5: Terzo modo di vibrare.

Esercizio 10 - Cod. VIB-048

Calcolare le prime tre pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare relativi alle vibrazioni trasversali della trave sotto riportata.

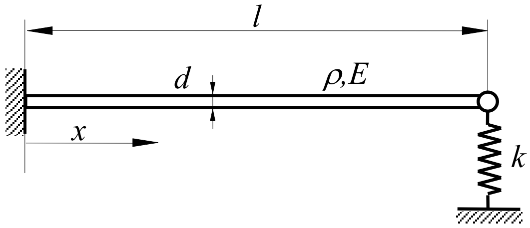


Figura 1

Dati

- Lunghezza dell'asta .... $l = 1$ m
- Modulo di Young dell'acciaio .... $E = 206000$ N/mm^2
- Densità dell'acciaio .... $\varrho = 7800$ kg/m^3
- Diametro della sezione trasversale dell'asta .... $d = 20$ mm
- Rigidezza della molla .... $k = 20000$ N/m

Soluzione

Indichiamo con:

$y(x,t)$	lo spostamento verticale di una generica sezione della trave;
$\varphi(x,t)$	la rotazione di una generica sezione della trave;
$M(x,t)$	il momento flettente agente in una generica sezione della trave;
$T(x,t)$	la forza di taglio in una generica sezione della trave.

Per la risoluzione del problema adottiamo le convenzioni di segno indicate in Figura 2:

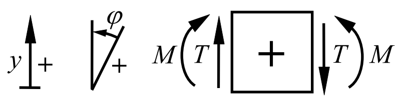


Figura 2

L'equazione delle vibrazioni trasversali è la seguente:

$$y(x,t) = Y(x)f(t) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x)(E\cos\omega t + F\sin\omega t) \tag{1}$$

dove:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \varrho A_s}{EJ}} \tag{2}$$

Le condizioni al contorno relative all'estremo sinistro ($x = 0$) sono:

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ \varphi(0,t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Le condizioni al contorno relative all'estremo destro ($x = l$) sono invece:

$$\begin{cases} M(l,t) = EJ\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = 0 \\ T(l,t) = EJ\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l,t) = ky(l,t) \end{cases} \tag{4}$$

Si osservi che la seconda delle (4) esprime la condizione di equilibrio delle forze agenti in corrispondenza dell'estremo destro della trave; tali forze, come risulta evidente dalla Figura 3, sono rappresentate dall'azione della molla $k\,y(l,t)$ e dalla forza di taglio $T(l,t)$.

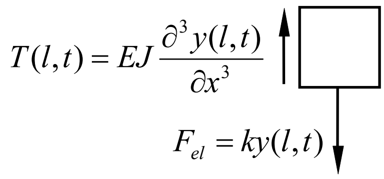


Figura 3 Estremo destro della trave.

Per imporre le condizioni suddette occorre effettuare il calcolo delle derivate parziali (prima, seconda e terza) rispetto ad x della funzione $y(x,t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \beta(-A\sin\beta x + B\cos\beta x + C\sinh\beta x + D\cosh\beta x)f(t) \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \beta^2(-A\cos\beta x - B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x)f(t) \tag{6}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x,t) = \beta^3(A\sin\beta x - B\cos\beta x + C\sinh\beta x + D\cosh\beta x)f(t) \tag{7}$$

Utilizzando ora le espressioni di $y(x,t)$ e delle sue derivate nelle condizioni al contorno (3) e (4), si ottiene, dopo opportune semplificazioni, il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ -A\cos\beta l - B\sin\beta l + C\cosh\beta l + D\sinh\beta l = 0 \\ EJ\beta^3(A\sin\beta l - B\cos\beta l + C\sinh\beta l + D\cosh\beta l) = k(A\cos\beta l + B\sin\beta l + C\cosh\beta l + D\sinh\beta l) \end{cases} \tag{8}$$

Ricavando dalle prime due equazioni del sistema (8) i valori delle costanti C e D e sostituendoli nelle rimanenti equazioni, si perviene al sistema:

$$\begin{cases} A(\cos\alpha + \cosh\alpha) + B(\sin\alpha + \sinh\alpha) = 0 \\ \alpha^3[A(\sin\alpha - \sinh\alpha) - B(\cos\alpha + \cosh\alpha)] = \dfrac{kl^3}{EJ}[A(\cos\alpha - \cosh\alpha) + B(\sin\alpha - \sinh\alpha)] \end{cases} \tag{9}$$

dove si è posto, per semplicità di scrittura, $\alpha = \beta l$.
Definendo ora $\lambda = \dfrac{kl^3}{EJ}$ e riordinando i termini, il sistema (9) può essere riscritto nella forma:

$$\begin{cases} A(\cos\alpha + \cosh\alpha) + B(\sin\alpha + \sinh\alpha) = 0 \\ A[\alpha^3(\sin\alpha - \sinh\alpha) - \lambda(\cos\alpha - \cosh\alpha)] - B[\alpha^3(\cos\alpha + \cosh\alpha) + \lambda(\sin\alpha - \sinh\alpha)] = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Affinché tale sistema abbia una soluzione non banale è necessario che sia nullo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} (\cos\alpha + \cosh\alpha) & (\sin\alpha + \sinh\alpha) \\ \left[\alpha^3(\sin\alpha - \sinh\alpha) - \lambda(\cos\alpha - \cosh\alpha)\right] & -\left[\alpha^3(\cos\alpha + \cosh\alpha) + \lambda(\sin\alpha - \sinh\alpha)\right] \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

Sviluppando il determinante, si ricava, dopo alcuni passaggi, l'equazione delle frequenze sotto riportata:

$$\frac{\lambda\cos\alpha\,\sinh\alpha - \alpha^3}{\cosh\alpha} = \alpha^3\cos\alpha + \lambda\sin\alpha \tag{12}$$

Tale equazione, risolta per via numerica, fornisce i valori di α corrispondenti alle pulsazioni proprie del sistema in esame; per risolvere la (12) occorre dapprima calcolare il valore del coefficiente λ, che risulta funzione di k (rigidezza della molla), l (lunghezza della trave), E (modulo di Young) e J (momento d'inerzia della sezione della trave rispetto all'asse neutro della flessione).
Con i dati forniti dal problema si ottengono i seguenti valori:

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times (20 \times 10^{-3})^4}{64} = 7.854 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}^4 \tag{13}$$

$$\lambda = \frac{kl^3}{EJ} = \frac{20000 \times 1^3}{206000 \times 10^6 \times 7.854 \times 10^{-9}} = 12.362 \tag{14}$$

La rappresentazione grafica dei due membri della (12) è riportata in Figura 4:

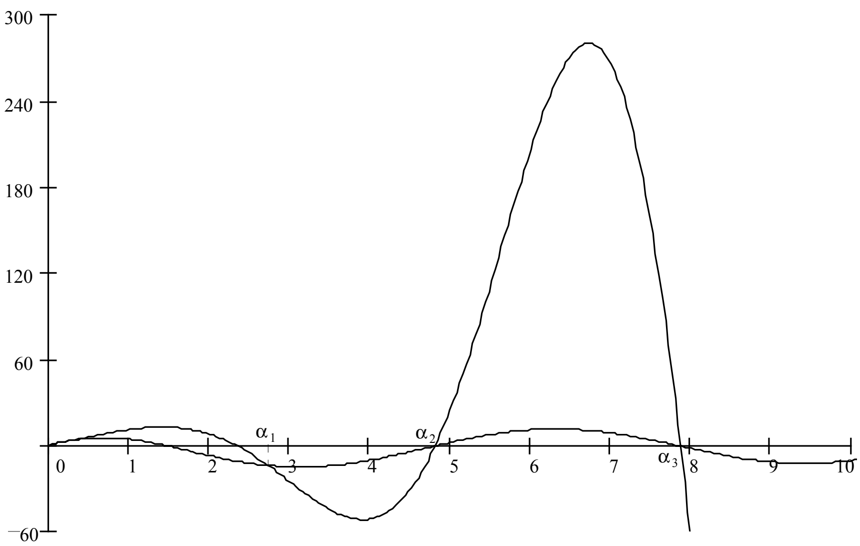


Figura 4

Si noti che, essendo $\alpha > 0$, si considera soltanto il semiasse orizzontale positivo.
Indichiamo con α_1, α_2 e α_3 le prime tre soluzioni della (12): dal grafico sopra riportato si deduce che:

$$2 < \alpha_1 < 3 \qquad 4 < \alpha_2 < 5 \qquad 7 < \alpha_3 < 8 \tag{15}$$

La soluzione numerica fornisce i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 l = 2.735 \\ \alpha_2 &= \beta_2 l = 4.818 \\ \alpha_3 &= \beta_3 l = 7.881 \end{aligned} \tag{16}$$

Le pulsazioni proprie si ricavano risolvendo la (2) rispetto ad ω:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{\varrho A_s}} = K\left(\frac{\alpha_n}{l}\right)^2 \qquad n = 1.2.3.\ldots \tag{17}$$

avendo posto $K = \sqrt{EJ/\varrho A_s}$.
Con i dati assegnati l'area della sezione trasversale A_s e la costante K risultano rispettivamente:

$$A_s = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times (20 \times 10^{-3})^2}{4} = 3.142 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2 \tag{18}$$

$$K = \sqrt{\frac{EJ}{\varrho A_s}} = \sqrt{\frac{2.06 \times 10^{11} \times 7.854 \times 10^{-9}}{7800 \times 3.142 \times 10^{-4}}} = 25.7\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s} \tag{19}$$

Le prime tre pulsazioni proprie assumono pertanto i valori sotto indicati:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= K\left(\frac{\alpha_1}{l}\right)^2 = 25.7\left(\frac{2.735}{1}\right)^2 = 192 \text{ rad/s} \\
\omega_2 &= K\left(\frac{\alpha_2}{l}\right)^2 = 25.7\left(\frac{4.818}{1}\right)^2 = 596 \text{ rad/s} \\
\omega_3 &= K\left(\frac{\alpha_3}{l}\right)^2 = 25.7\left(\frac{7.881}{1}\right)^2 = 1596 \text{ rad/s}
\end{aligned} \tag{20}$$

Esercizio 11 - Cod. VIB-049

Calcolare le prime tre pulsazioni proprie ed i modi principali di vibrare relativi alle vibrazioni trasversali della trave sotto riportata.

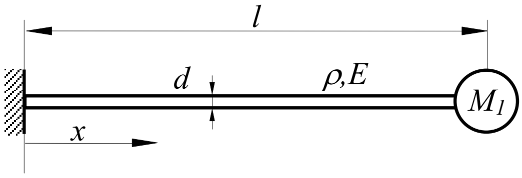


Figura 1

Dati

- Lunghezza dell'asta .... $l = 0.8$ m
- Modulo di Young dell'acciaio .... $E = 206000$ N/mm^2
- Densità dell'acciaio .... $\varrho = 7800$ kg/m^3
- Diametro della sezione trasversale dell'asta .... $d = 25$ mm
- Massa applicata all'estremità destra dell'asta .... $M_1 = 15$ kg

Soluzione

Indichiamo con:

$y(x,t)$	lo spostamento verticale di una generica sezione della trave;
$\varphi(x,t)$	la rotazione di una generica sezione della trave;
$M(x,t)$	il momento flettente agente in una generica sezione della trave;
$T(x,t)$	la forza di taglio in una generica sezione della trave.

Per la risoluzione del problema adottiamo le convenzioni di segno indicate in Figura 2:

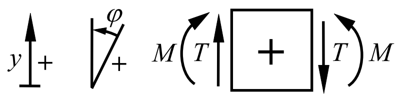


Figura 2

L'equazione delle vibrazioni trasversali è la seguente:

$$y(x,t) = Y(x)f(t) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x)(E\cos\omega t + F\sin\omega t) \tag{1}$$

dove:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \varrho A_s}{EJ}} \tag{2}$$

Le condizioni al contorno relative all'estremo sinistro ($x = 0$) sono:

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ \varphi(0,t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Le condizioni al contorno relative all'estremo destro ($x = l$) sono invece:

$$\begin{cases} M(l,t) = EJ\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = 0 \\ T(l,t) = EJ\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l,t) = M_1\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(l,t) \end{cases} \tag{4}$$

Si osservi che la seconda delle (4) esprime la condizione di equilibrio delle forze agenti in corrispondenza dell' estremo destro della trave; tali forze, come risulta evidente dalla Figura 3 sotto riportata, sono rappresentate dalla forza d'inerzia $M_1 \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(l,t)$ generata dalla massa concentrata e dalla forza di taglio $T(l,t)$.

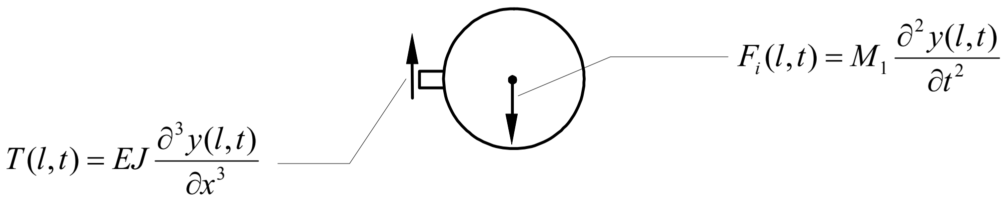


Figura 3

Per imporre le condizioni suddette occorre effettuare il calcolo delle derivate parziali (prima, seconda e terza) rispetto ad x della funzione $y(x,t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \beta(-A\sin\beta x + B\cos\beta x + C\sinh\beta x + D\cosh\beta x) f(t) \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \beta^2(-A\cos\beta x - B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x) f(t) \tag{6}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x,t) = \beta^3(A\sin\beta x - B\cos\beta x + C\sinh\beta x + D\cosh\beta x) f(t) \tag{7}$$

Le condizioni (3), relative all'estremo incastrato, forniscono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C = -A \\ D = -B \end{cases} \tag{8}$$

La prima delle (4) dà luogo all'equazione:

$$-A\cos\beta l - B\sin\beta l + C\cosh\beta l + D\sinh\beta l = 0 \tag{9}$$

La seconda delle (4) richiede alcune considerazioni preliminari, Poiché contiene una derivata parziale calcolata rispetto al tempo; ricordando che $y(x,t) = Y(x)f(t)$ e che $f(t) = E\cos\omega t + F\sin\omega t$, si può scrivere:

$$\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} = \frac{d^3 Y(x)}{dx^3} f(t) \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = Y(x)\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\omega^2 Y(x) f(t) \tag{11}$$

Semplificando il termine $f(t)$, presente in ambo i membri dell'equazione, la seconda delle (4) diviene:

$$EJ\frac{d^3 Y(l)}{dx^3} = -M_1\omega^2 Y(l) \tag{12}$$

ovvero:

$$\beta^3(A\sin\beta l - B\cos\beta l + C\sinh\beta l + D\cosh\beta l) = -\frac{M_1}{EJ}\omega^2(A\cos\beta l + B\sin\beta l + C\cosh\beta l + D\sinh\beta l) \tag{13}$$

Risolvendo la (2) rispetto ad ω^2 si ha:

$$\omega^2 = \beta^4 \frac{EJ}{\varrho A_s} \tag{14}$$

Sostituendo nella (13) l'espressione di ω^2 fornita dalla (14) e semplificando opportunamente si ottiene:

$$A\sin\beta l - B\cos\beta l + C\sinh\beta l + D\cosh\beta l = -\frac{M_1\beta}{\varrho A_s}(A\cos\beta l + B\sin\beta l + C\cosh\beta l + D\sinh\beta l) \tag{15}$$

Per semplicità possiamo porre $\alpha = \beta l$ e riscrivere la (15) nella forma seguente:

$$A \sin\alpha - B\cos\alpha + C\sinh\alpha + D\cosh\alpha = -\frac{M_1}{\varrho A_s l}\alpha(A\cos\alpha + B\sin\alpha + C\cosh\alpha + D\sinh\alpha) \tag{16}$$

Si osservi che il termine $\frac{M_1}{\varrho A_s l}$ che compare al secondo membro dell'equazione rappresenta il rapporto fra il valore della massa M_1, applicata all'estremo libero, ed il valore della massa propria della trave $m = \varrho A_s l$; posto $\lambda = M_1/m$ e tenendo conto delle relazioni (8), le equazioni (9) e (16) assumono la forma sotto riportata:

$$\begin{cases} A(\cos\alpha + \cosh\alpha) + B(\sin\alpha + \sinh\alpha) = 0 \\ A[(\sin\alpha - \sinh\alpha) + \lambda\alpha(\cos\alpha - \cosh\alpha)] - B[(\cos\alpha + \cosh\alpha) - \lambda\alpha(\sin\alpha - \sinh\alpha)] = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Affinché tale sistema abbia una soluzione non banale è necessario che sfa nullo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} (\cos\alpha + \cosh\alpha) & (\sin\alpha + \sinh\alpha) \\ [(\sin\alpha - \sinh\alpha) + \lambda\alpha(\cos\alpha - \cosh\alpha)] & -[(\cos\alpha + \cosh\alpha) - \lambda\alpha(\sin\alpha - \sinh\alpha)] \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

Sviluppando il determinante si ricava, dopo alcuni passaggi, l'equazione delle frequenze sotto riportata:

$$\frac{1 + \lambda\alpha\cos\alpha\sinh\alpha}{\cosh\alpha} = \lambda\alpha\sin\alpha - \cos\alpha \tag{19}$$

Tale equazione, risolta per via numerica, fornisce i valori di α corrispondenti alle pulsazioni proprie del sistema in esame; per risolvere la (19) occorre dapprima calcolare il valore del coefficiente λ, che risulta funzione di M_1 (massa concentrata), ϱ (densità del materiale costituente la trave), A_s (area della sezione trasversale della trave), ed l (lunghezza della trave).
Con i dati forniti dal problema si ottengono i valori sotto riportati:

$$A_s = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times (25\times 10^{-3})^2}{4} = 4.909 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2 \tag{20}$$

$$m = \varrho A_s l = 7800 \times 4.909 \times 10^{-4} \times 0.8 = 3.063\ \mathrm{kg} \tag{21}$$

$$\lambda = \frac{M_1}{m} = \frac{15}{3.063} = 4.897 \tag{22}$$

La rappresentazione grafica dei due membri della (19) è riportata in Figura 4:
Si noti che, essendo $\alpha > 0$, si considera soltanto il semiasse orizzontale positivo.
Indichiamo con α_1, α_2 e α_3 le prime tre soluzioni della (19): dal grafico si deduce che:

$$\alpha_1 \cong 1 \qquad \alpha_2 \cong 4 \qquad \alpha_3 \cong 7 \tag{23}$$

La soluzione numerica fornisce i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 l = 0.874 \\ \alpha_2 &= \beta_2 l = 3.950 \\ \alpha_3 &= \beta_3 l = 7.083 \end{aligned} \tag{24}$$

Le pulsazioni proprie si ricavano risolvendo la (2) rispetto ad ω:

$$\omega_n = \beta_n^2\sqrt{\frac{EJ}{\varrho A_s}} = K\left(\frac{\alpha_n}{l}\right)^2 \qquad n = 1.2.3.\ldots \tag{25}$$

avendo posto $K = \sqrt{EJ/\varrho A_s}$.
Con i dati assegnati il momento d'inerzia J e la costante K risultano rispettivamente:

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi\times(25\times 10^{-3})^4}{64} = 1.917\times 10^{-8}\ \mathrm{m}^4 \tag{26}$$

$$K = \sqrt{\frac{EJ}{\varrho A_s}} = \sqrt{\frac{2.06\times 10^{11}\times 1.917\times 10^{-8}}{7800\times 4.909\times 10^{-4}}} = 32.12\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s} \tag{27}$$

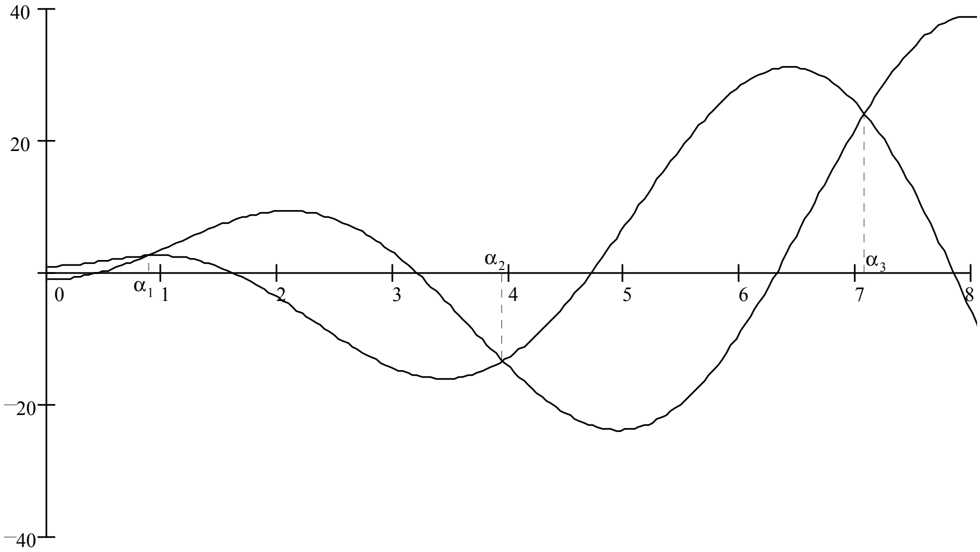


Figura 4

Le prime tre pulsazioni proprie assumono pertanto i valori sotto indicati:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= K\left(\frac{\alpha_1}{l}\right)^2 = 32.12\left(\frac{0.874}{0.8}\right)^2 = 38.4 \text{ rad/s} \\
\omega_2 &= K\left(\frac{\alpha_2}{l}\right)^2 = 32.12\left(\frac{3.950}{0.8}\right)^2 = 783.2 \text{ rad/s} \\
\omega_3 &= K\left(\frac{\alpha_3}{l}\right)^2 = 32.12\left(\frac{7.083}{0.8}\right)^2 = 2517.7 \text{ rad/s}
\end{aligned} \tag{28}$$

Se avessimo trascurato la massa distribuita con continuità lungo l'asta, avremmo ottenuto un semplice modello ad un grado di libertà del tipo indicato in Figura 5:

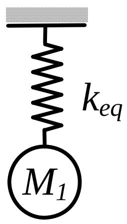


Figura 5

La costante elastica k_{eq} è data dalla rigidezza flessionale della trave a mensola:

$$k_{eq} = \frac{3EJ}{l^3} = \frac{3 \times 2.06 \times 10^{11} \times 1.917 \times 10^{-8}}{0.8^3} = 23144 \text{ N/m} \tag{29}$$

La pulsazione propria vale quindi:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{k_{eq}}{M_1}} = \sqrt{\frac{23144}{15}} = 39.3 \text{ rad/s} \tag{30}$$

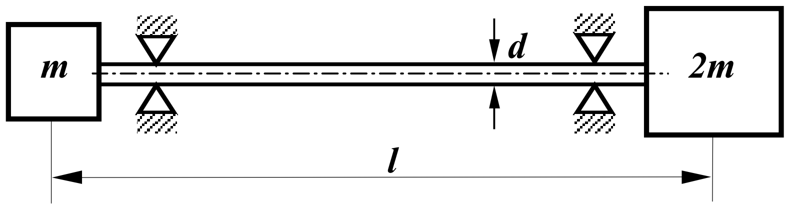
Come si può notare, il valore della pulsazione propria calcolato mediante il modello approssimato risulta molto vicino al valore della prima pulsazione propria del modello a parametri distribuiti; ciò è dovuto al fatto che la massa della trave è piccola rispetto alla massa concentrata nell'estremo libero ($\lambda = M_1/m \cong 5$); l'errore percentuale $\Delta\%$ che si commette utilizzando il modello semplificato vale:

$$\Delta\% = \left(\frac{\omega^* - \omega_1}{\omega_1}\right) \times 100 = \left(\frac{39.3 - 38.4}{38.4}\right) \times 100 = 2.38\% \tag{31}$$

Chiaramente, l'impiego del modello semplificato (ad un solo grado di libertà) non consente di ricavare le altre pulsazioni proprie del sistema.

Esercizi proposti

Esercizio 12 - Cod. VIB-058



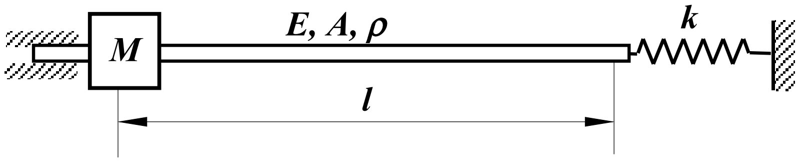
Il sistema vibrante rappresentato in figura è costituito da due masse collocate alle estremità di una barra di acciaio scorrevole senza attrito su due supporti.

a) Nell'ipotesi che la barra abbia massa trascurabile, si calcolino le frequenze proprie relative alle vibrazioni assiali del sistema.
b) Supponendo che la massa della barra non sia trascurabile, si imposti il procedimento di calcolo che permette di determinare le frequenze proprie relative alle vibrazioni assiali.

Dati

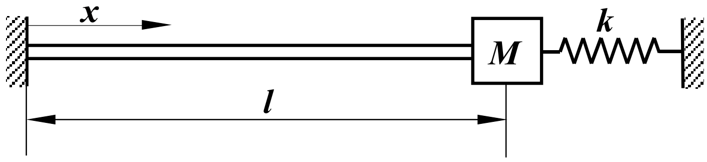
- Masse .... m $2m$
- Lunghezza della barra l
- Diametro della barra .... d
- Modulo di Young dell'acciaio .... E
- Densità dell'acciaio .... ϱ

Esercizio 13 - Cod. VIB-065



Si ricavi l'equazione delle frequenze relativa alle vibrazioni assiali dell'asta rappresentata in figura.

Esercizio 14 - Cod. VIB-092

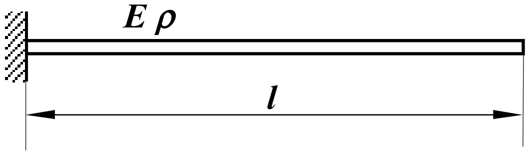


Si imposti il calcolo delle pulsazioni proprie relative alle vibrazioni assiali del sistema in figura, nell'ipotesi che la massa dell'asta non sia trascurabile.

Dati

- Massa fissata all'estremità destra .... M
- Rigidezza della molla .... k
- Modulo di Young del materiale costituente l'albero .... E
- Densità del materiale costituente l'albero .... ϱ
- Lunghezza dell'albero L
- Diametro dell'albero .... d

Esercizio 15 - Cod. VIB-097

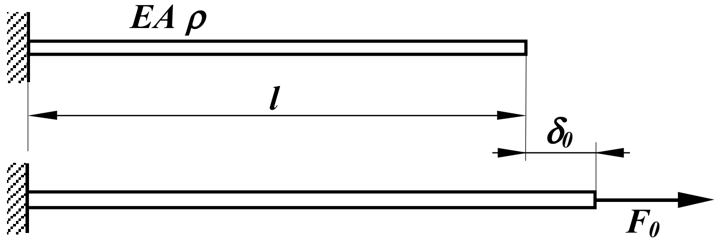


Supponendo di conoscere la distribuzione degli spostamenti assiali $u_0(x)$ e la distribuzione delle velocità $\dot{u}_0(x)$ per una trave incastro-estremo libero, determinare l'espressione analitica delle vibrazioni $u(x,t)$.

Dati

- Lunghezza dell'asta l
- Modulo di Young del materiale costituente l'asta .... E
- Densità del materiale costituente l'asta .... ϱ

Esercizio 16 - Cod. VIB-098

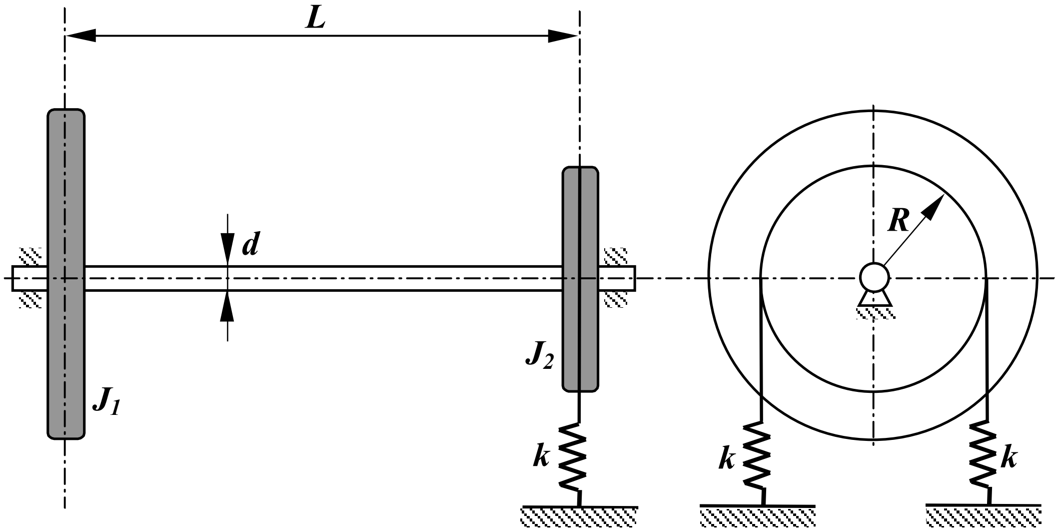


Un'asta avente sezione trasversale di area costante A, densità ϱ, modulo elastico E e lunghezza l è fissata ad una estremità ed è libera all'altra. L'asta è soggetta ad una forza assiale F_0 applicata al suo estremo libero, come mostrato in figura.
Studiare le vibrazioni assiali che si manifestano nell'asta quando la forza F_0 viene improvvisamente rimossa.

Dati

- Area della sezione trasversale dell'asta .... A
- Densità del materiale costituente l'asta .... ϱ
- Modulo di Young del materiale costituente l'asta .... E
- Lunghezza dell'asta l
- Forza applicata all'estremo libero .... F_0

Esercizio 17 - Cod. VIB-071

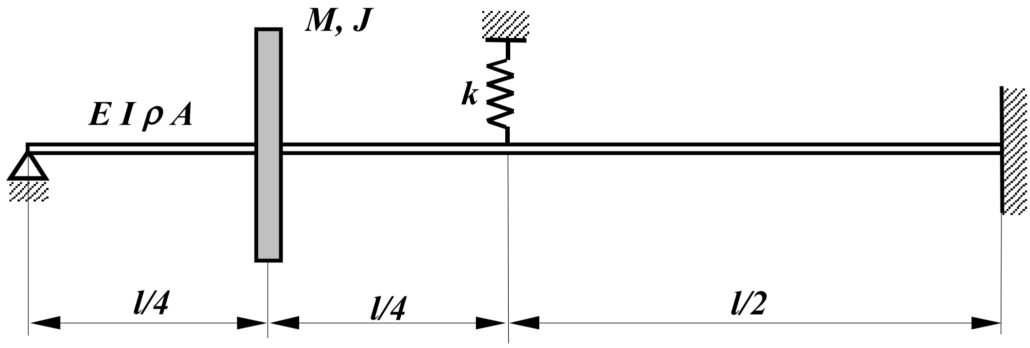


Si imposti il calcolo delle pulsazioni proprie relative alle vibrazioni torsionali del sistema in figura, nell'ipotesi che la massa dell'albero che collega i due dischi non sia trascurabile.

Dati

- Momento d'inerzia del disco all'estremità sinistra .... J_1
- Momento d'inerzia del disco all'estremità destra .... J_2
- Rigidezza delle molle .... k
- Raggio di avvolgimento delle molle .... R
- Modulo elastico tangenziale del materiale costituente l'albero .... G
- Densità del materiale costituente l'albero .... ϱ
- Lunghezza dell'albero L
- Diametro dell'albero .... d

Esercizio 18 - Cod. VIB-085

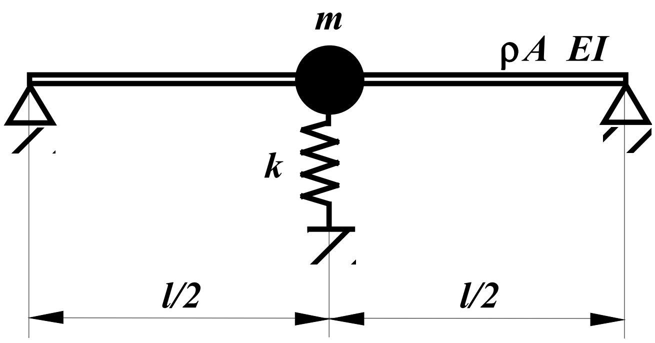


Si considerino le vibrazioni flessionali della trave elastica rappresentata in figura e si imposti il calcolo che permette di ricavare le pulsazioni proprie del sistema (scrittura delle condizioni al contorno relative ad ogni tronco).

Dati

- Massa del corpo rigido fissato alla trave .... M
- Momento d'inerzia baricentrico del corpo rigido fissato alla trave .... J
- Densità del materiale costituente la trave .... ϱ
- Modulo di Young del materiale costituente la trave .... E
- Momento d'inerzia della sezione della trave rispetto all'asse neutro della flessione I
- Area della sezione trasversale della trave .... A
- Lunghezza della trave l
- Rigidezza della molla .... k

Esercizio 19 - Cod. VIB-087



Si consideri il sistema in figura, costituito da una trave montata su due supporti, sulla quale è fissata una massa m, vincolata a terra mediante una molla di rigidezza k.

Domande

1. Si supponga in prima approssimazione che la massa della trave sia trascurabile rispetto alla massa concentrata m e si calcoli la pulsazione propria del sistema.
2. Si consideri ora il caso in cui la massa della trave non sia trascurabile e si imposti il calcolo che permette di determinare le pulsazioni proprie del sistema.

Dati

- Massa concentrata .... m
- Rigidezza della molla .... k
- Densità del materiale costituente la trave .... ϱ
- Modulo di Young del materiale costituente la trave .... E
- Momento d'inerzia della sezione della trave rispetto all'asse neutro della flessione I
- Area della sezione trasversale della trave .... A
- Lunghezza della trave l