Vibrazioni di sistemi ad un grado di libertà

Esercizio 1 - Cod. VIB-002

Per il sistema vibrante rappresentato in Figura 1 si chiede di:

- scrivere l'equazione di moto e calcolare la pulsazione propria;
- determinare la legge di moto, essendo note le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

  dove x indica lo spostamento del baricentro del rullo rispetto alla posizione di equilibrio statico.
- determinare il minimo valore del coefficiente di aderenza fra rullo e terreno che garantisce il non slittamento del rullo stesso.

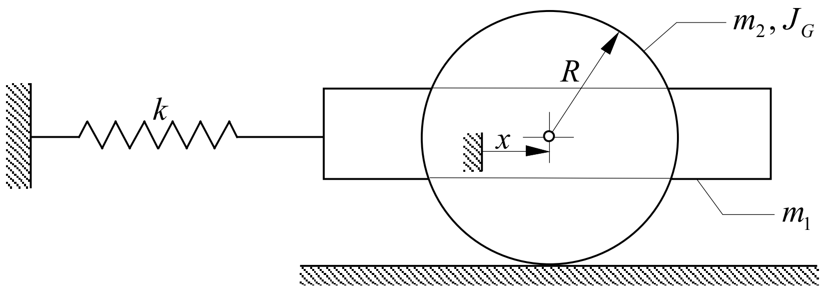


Figura 1

Dati

- Massa del carrello .... m_1
- Massa del rullo .... m_2
- Momento d'inerzia baricentrico del rullo .... J_G
- Rigidezza della molla .... k
- Raggio del rullo .... R
- Condizioni iniziali .... $x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = 0$

Soluzione

L'equazione di moto del sistema verrà ricavata utilizzando sia il *metodo degli equilibri dinamici* sia il *metodo energetico*.

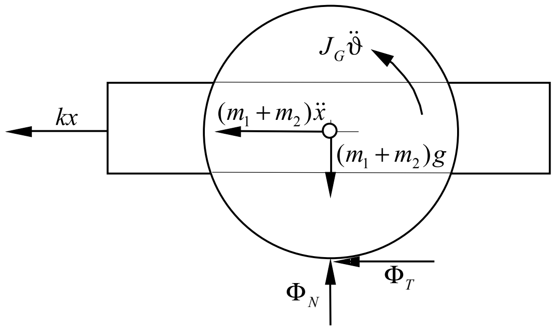


Figura 2

Metodo degli equilibri dinamici

Per risolvere il problema con il metodo degli equilibri dinamici occorre in primo luogo disegnare il diagramma di corpo libero del sistema rullo-carrello, mettendo in evidenza le forze che agiscono durante il moto.
La coppia d'inerzia sul rullo vale $C_i = J_G\ddot{\vartheta}$, dove ϑ indica la rotazione del rullo stesso; se si ipotizza l'assenza di strisciamento fra rullo e terreno, è possibile correlare lo spostamento x del baricentro e la rotazione ϑ tramite la relazione:

$$x = R\vartheta \tag{1}$$

A questo punto si possono scrivere le seguenti tre equazioni di equilibrio dinamico:
Equilibrio alla traslazione verticale per l'intero sistema:

$$\Phi_N = (m_1 + m_2)g \tag{2}$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale per l'intero sistema:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + kx + \Phi_T = 0 \tag{3}$$

Equilibrio alla rotazione attorno al baricentro per il solo rullo:

$$\Phi_T R - J_G\ddot{\vartheta} = 0 \tag{4}$$

Da quest'ultima equazione si può ricavare l'espressione della forza Φ_T:

$$\Phi_T = \frac{J_G}{R}\ddot{\vartheta} = \frac{J_G}{R^2}\ddot{x} \tag{5}$$

Sostituendo ora il valore di Φ_T così calcolato nell'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale, si perviene all'equazione di moto:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{J_G}{R^2}\right)\ddot{x} + kx = 0 \tag{6}$$

La pulsazione propria del sistema risulta quindi:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2 + \dfrac{J_G}{R^2}}} = \sqrt{\frac{k}{m_{eq}}} \tag{7}$$

dove $m_{eq} = m_1 + m_2 + J_G/R^2$ rappresenta la massa equivalente del sistema.

Metodo energetico

La risoluzione con il metodo energetico consiste nell'esprimere la conservazione dell'energia meccanica totale (cinetica e potenziale) del sistema. Poiché sono verificate le seguenti ipotesi:

- assenza di forzanti esterne;
- assenza di attriti nel perno di collegamento del rullo al carrello;

- sistema soggetto a vincoli non dissipativi (fra il rullo ed il terreno vi è un vincolo di puro rotolamento, mantenuto tramite attrito statico);

l'energia totale del sistema si mantiene costante, quindi:

$$T + V = \text{cost.} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}(T+V) = 0 \tag{8}$$

Esprimendo l'energia cinetica e potenziale in funzione della coordinata libera x otteniamo:

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{x}^2 + J_G\dot{\vartheta}^2) = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{J_G}{R^2}\right)\dot{x}^2 \tag{9}$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \tag{10}$$

Derivando ora rispetto al tempo l'energia totale si ha:

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \dot{x}\left[\left(m_1 + m_2 + \frac{J_G}{R^2}\right)\ddot{x} + kx\right] = 0 \tag{11}$$

da cui,essendo $\dot{x} \neq 0$, si ricava nuovamente l'equazione di moto

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{J_G}{R^2}\right)\ddot{x} + kx = 0 \tag{12}$$

Risoluzione dell'equazione di moto

L'equazione di moto ottenuta è un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti; essa descrive le vibrazioni libere del sistema la sua soluzione è del tipo:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{13}$$

dove A e B rappresentano due opportune costanti.
Derivando la soluzione $x(t)$ si ha:

$$\dot{x}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \tag{14}$$

Come è noto, le costanti A e B si determinano imponendo le condizioni iniziali assegnate dal testo:

$$x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = 0 \tag{15}$$

Dalla prima condizione si ricava:

$$x(0) = A = x_0 \tag{16}$$

mentre dalla seconda si ottiene:

$$\dot{x}(0) = \omega B = 0 \qquad B = 0 \tag{17}$$

Pertanto la legge di moto è espressa dall'equazione:

$$x(t) = x_0\cos\omega t \tag{18}$$

Calcolo del minimo valore del coefficiente di aderenza che impedisce lo slittamento del rullo

Affinché non vi sia slittamento fra rullo e terreno deve essere verificata la disequazione di Coulomb:

$$\mu \geq \left|\frac{\Phi_T}{\Phi_N}\right| \tag{19}$$

dove μ indica il coefficiente di aderenza (o di attrito statico) fra rullo e terreno.
La reazione normale Φ_N rimane costante nel tempo ed il suo valore è pari al peso del sistema rullo-carrello; al contrario, la reazione tangenziale Φ_T varia nel tempo secondo la legge:

$$\Phi_T(t) = \frac{J_G}{R^2}\ddot{x}(t) = -\frac{J_G}{R^2}\omega^2 x_0\cos\omega t \tag{20}$$

La condizione più sfavorevole per lo slittamento si verifica quando il modulo della forza tangenziale raggiunge il suo valore massimo:

$$\Phi_{Tmax} = \frac{J_G}{R^2}\omega^2 x_0 \tag{21}$$

Quindi dovrà risultare:

$$\mu \geq \left| \frac{\Phi_{Tmax}}{\Phi_N} \right| = \frac{\frac{J_G}{R^2}\omega^2 x_0}{(m_1 + m_2)g} = \mu_{min} \tag{22}$$

Esercizio 2 - Cod. VIB-003

Il pendolo semplice in Figura 1 è incernierato nel punto O; a tale punto viene impresso un moto orizzontale con legge $x(t) = X \sin \Omega t$; determinare:

1. lo spostamento angolare $\vartheta(t)$ del pendolo per $\Omega/\omega > 1$ e per $\Omega/\omega < 1$ (ω indica la pulsazione propria del pendolo);
2. la forza richiesta per imprimere il moto orizzontale al punto O.

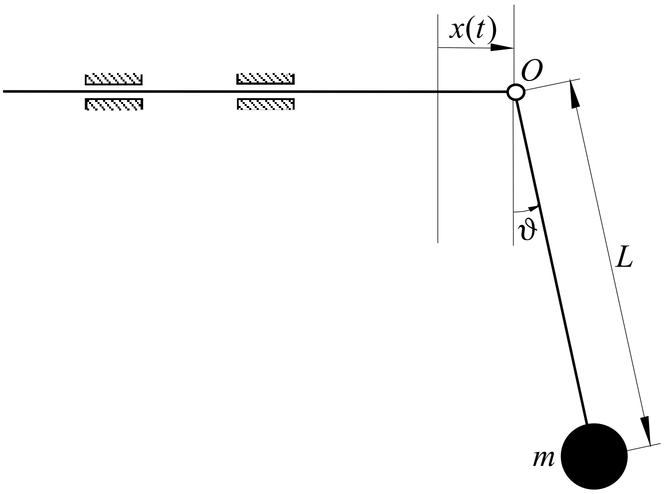


Figura 1

Dati

- Massa del pendolo .... m
- Lunghezza del pendolo L
- Ampiezza dello spostamento armonico X
- Pulsazione dello spostamento armonico .... Ω

Soluzione

1. Calcolo dello spostamento angolare $\vartheta(t)$

Per risolvere il problema assegnato occorre in primo luogo mettere in evidenza le forze agenti sul sistema durante il moto (vedi Figura 2). Si osservi che la forza d'inerzia agente sulla massa m è stata scomposta nelle sue componenti generate dal moto di trascinamento (traslatorio in direzione orizzontale) e dal moto relativo (rotatorio attorno al punto O).
Per l'equilibrio dinamico alla rotazione attorno al punto O possiamo scrivere:

$$m\ddot{x}L\cos\vartheta + mL^2\ddot{\vartheta} + mgL\sin\vartheta = 0 \tag{1}$$

Se si ritiene valida l'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio ($\sin\vartheta \cong \vartheta$, $\cos\vartheta \cong 1$), si ottiene, con semplici passaggi:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{L}\vartheta = -\frac{\ddot{x}}{L} \tag{2}$$

ovvero, essendo $\ddot{x} = -\Omega^2 X \sin\Omega t$:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{L}\vartheta = \frac{\Omega^2 X}{L}\sin\Omega t \tag{3}$$

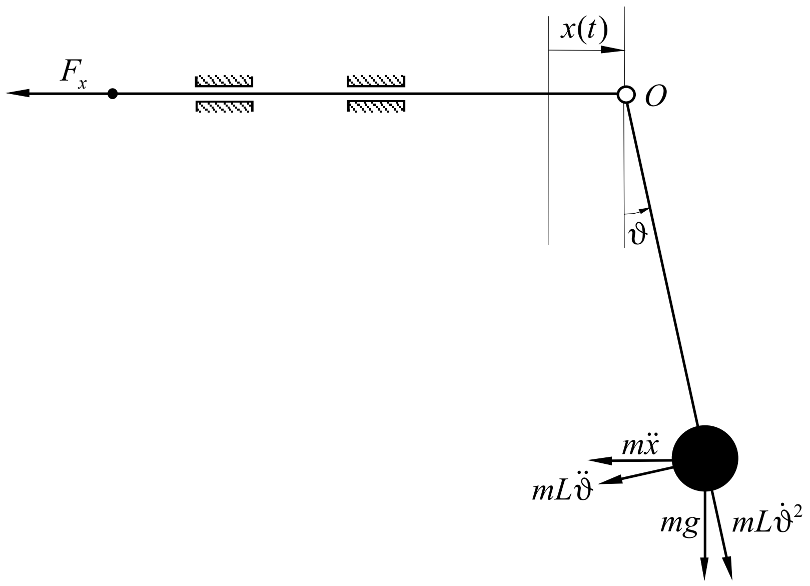


Figura 2

La pulsazione propria del sistema risulta pertanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{4}$$

Poiché il sistema in esame è lineare (nell'ipotesi di piccole oscillazioni) ed è eccitato da una forzante armonica di pulsazione Ω, il moto a regime risulterà ancora armonico, con pulsazione uguale a quella della forzante; quindi, indicando con $\vartheta(t)$ la soluzione a regime, si può scrivere:

$$\vartheta(t) = \Theta \sin(\Omega t - \varphi) \tag{5}$$

Non essendo presenti elementi smorzanti nel sistema, lo sfasamento φ è nullo per $\Omega/\omega < 1$ mentre vale π radianti per $\Omega/\omega > 1$.
L'ampiezza delle oscillazioni a regime si calcola sostituendo la funzione $\vartheta(t)$ e la sua derivata seconda nell'equazione di moto e risolvendo il tutto rispetto a Θ; dopo semplici passaggi si ottiene:

$$\Theta = \frac{\dfrac{X}{L}\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left|1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} \tag{6}$$

In definitiva si ha:

$$\vartheta(t) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{X}{L}\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2} \sin\Omega t & \text{per } \dfrac{\Omega}{\omega} < 1 \\[3ex] \dfrac{\dfrac{X}{L}\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left|1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} \sin(\Omega t - \pi) & \text{per } \dfrac{\Omega}{\omega} > 1 \end{cases} \tag{7}$$

Nel diagramma seguente è riportato l'andamento dell'ampiezza di vibrazione adimensionalizzata $\Theta L/X$ in funzione del rapporto di frequenza Ω/ω; si osserva che, avendo trascurato lo smorzamento, l'ampiezza delle vibrazioni tende all'infinito in condizioni di risonanza ($\Omega/\omega = 1$).

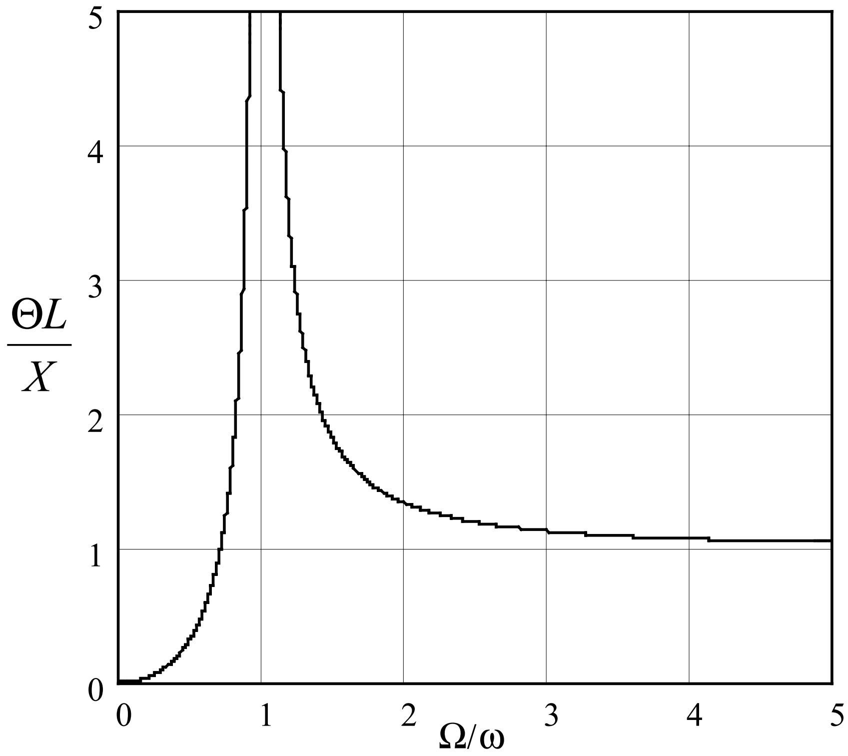


Figura 3

2. Calcolo della forza richiesta per imprimere il moto orizzontale al punto O

Indicando con F_x la forza incognita, l'equilibrio alla traslazione orizzontale per l'intero sistema (asta orizzontale + pendolo) fornisce l'equazione seguente:

$$F_x + m\ddot{x} + mL\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - mL\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta = 0 \tag{8}$$

Per piccole oscillazioni si ha:

$$F_x + m\ddot{x} + mL\ddot{\vartheta} - mL\dot{\vartheta}^2\vartheta = 0 \tag{9}$$

Trascurando, per semplicità, l'ultimo termine al primo membro e risolvendo rispetto ad F_x si ottiene:

$$F_x = -(m\ddot{x} + mL\ddot{\vartheta}) \tag{10}$$

Dall'equazione di moto risulta:

$$mg\vartheta = -(m\ddot{x} + mL\ddot{\vartheta}) \tag{11}$$

Per cui:

$$F_x = mg\,\vartheta(t) = \begin{cases} mg\,\dfrac{\dfrac{X}{L}\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}\sin\Omega t & \text{per } \dfrac{\Omega}{\omega} < 1 \\[2em] mg\,\dfrac{\dfrac{X}{L}\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left|1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|}\sin(\Omega t - \pi) & \text{per } \dfrac{\Omega}{\omega} > 1 \end{cases} \tag{12}$$

Esercizio 3 - Cod. VIB-004

Nel sistema in Figura 1, collocato in un piano verticale, l'asta scorrevole all'interno del manicotto si muove nella direzione indicata con legge armonica $y(t) = Y \sin \Omega t$.
Scrivere l'espressione analitica del moto a regime e determinarne l'ampiezza e la fase, assumendo l'ipotesi di piccole oscillazioni dell'asta AB attorno al punto O.

Nota. Per semplicità si supponga che l'asta AB (di massa trascurabile) sia in equilibrio statico in posizione orizzontale, con $y = 0$ e con la molla che esercita un tiro T_s.

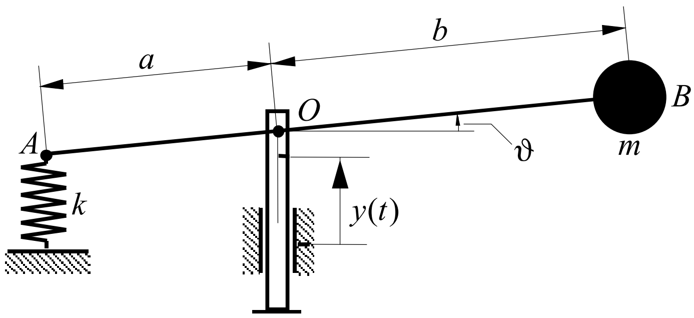


Figura 1

Dati

- Lunghezza dei bracci dell'asta AB .... $a = 0.2$ m $b = 0.3$ m
- Massa concentrata nell'estremo B .... $m = 2$ kg
- Rigidezza della molla .... $k = 500$ N/m
- Pulsazione del movimento armonico dell'asta scorrevole .... $\Omega = 40$ rad/s
- Ampiezza del movimento armonico dell'asta scorrevole .... $Y = 10$ mm

Soluzione

Il testo afferma che la posizione di equilibrio del sistema si ha per $\vartheta = 0$, con $y = 0$ e con la molla che esercita un tiro T_s (vedi Figura 2). Pertanto dovrà essere verificata la relazione:

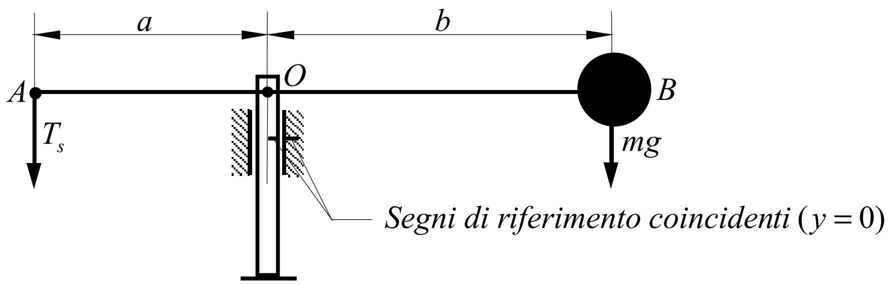


Figura 2

$$T_s a = mgb \tag{1}$$

da cui:

$$T_s = mg\frac{b}{a} = 29.43 \text{ N} \tag{2}$$

L'allungamento statico δ_{st} della molla all'equilibrio risulta:

$$\delta_{st} = \frac{T_s}{k} = 0.058 \text{ m} = 58 \text{ mm} \tag{3}$$

Per ricavare l'equazione di moto occorre disegnare il sistema in una generica posizione, mettendo in evidenza le forze agenti su di esso durante il movimento.

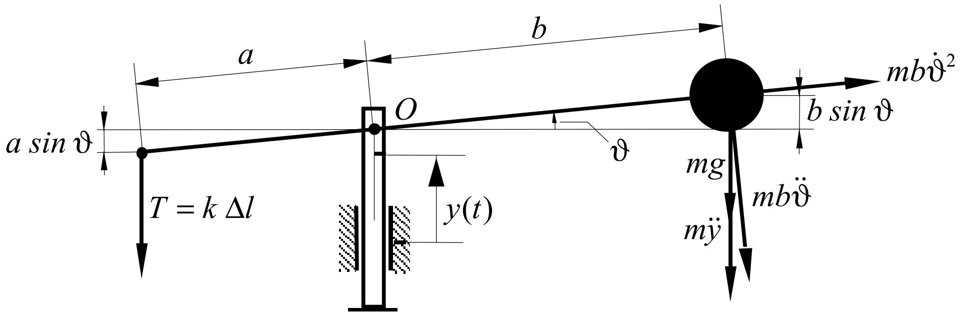


Figura 3

Si osservi che la forza d'inerzia agente sulla massa m è stata scomposta nelle sue componenti generate dal moto di trascinamento (traslatorio in direzione verticale) e dal moto relativo (rotatorio attorno al punto O).
L'allungamento totale Δl della molla vale:

$$\Delta l = \delta_{st} + y - a \sin\vartheta \tag{4}$$

e la corrispondente forza elastica:

$$T = k\Delta l = k(\delta_{st} + y - a\sin\vartheta) = T_s + k(y - a\sin\vartheta) \tag{5}$$

L'equilibrio dinamico alla rotazione attorno al punto O fornisce la seguente equazione:

$$(mb\ddot{\vartheta})b + (mg + m\ddot{y})b\cos\vartheta - Ta\cos\vartheta = 0 \tag{6}$$

Sostituendo in tale equazione il valore della forza elastica T precedentemente calcolata e ritenendo valida l'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio ($\sin\vartheta \cong \vartheta$, $\cos\vartheta \cong 1$), si perviene con semplici passaggi alla seguente equazione:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{ka^2}{mb^2}\vartheta = \frac{ka}{mb^2}y - \frac{1}{b}\ddot{y} \tag{7}$$

Poiché il moto dell'asta verticale scorrevole $y(t)$ è di tipo armonico si può scrivere:

$$\begin{aligned} y(t) &= Y\sin\Omega t \\ \ddot{y}(t) &= -\Omega^2 Y \sin\Omega t \end{aligned} \tag{8}$$

Pertanto l'equazione di moto può essere riscritta nella forma:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{ka^2}{mb^2}\vartheta = \left(\frac{kaY}{mb^2} + \frac{\Omega^2 Y}{b}\right)\sin\Omega t \tag{9}$$

La pulsazione propria del sistema risulta:

$$\omega = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{k}{m}} = 10.54 \text{ rad/s} \tag{10}$$

La soluzione a regime vale:

$$\vartheta(t) = \Theta\sin(\Omega t - \varphi) \tag{11}$$

Poiché nel sistema non compaiono elementi smorzanti, lo sfasamento φ è nullo per $\Omega/\omega < 1$, mentre vale π radianti per $\Omega/\omega > 1$; nel nostro caso:

$$\Omega/\omega = 3.795 > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \pi \tag{12}$$

L'ampiezza delle oscillazioni a regime si ricava, come è noto, sostituendo la funzione $\vartheta(t)$ e la sua derivata seconda nell'equazione di moto, semplificando i termini sinusoidali e risolvendo il tutto rispetto a Θ; dopo semplici passaggi si ottiene:

$$\Theta = \frac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left|1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} Y = 0.0396 \text{ rad} = 2.27^\circ \tag{13}$$

Come si può osservare, l'ampiezza delle vibrazioni a regime è dell'ordine di qualche grado: è quindi verificata l'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio. L'espressione del moto a regime risulta, in definitiva:

$$\vartheta(t) = 0.0396 \sin(40t - \pi) \tag{14}$$

dove t è espresso in secondi e ϑ in radianti.

Esercizio 4 - Cod. VIB-005

Per il sistema in Figura 1 determinare:

1. la pulsazione propria;
2. l'ampiezza delle oscillazioni a regime, quando alla puleggia viene applicata una coppia variabile nel tempo secondo la legge $C_m = C_0 \sin \Omega t$.

Nota. Si ritenga trascurabile l'attrito fra il corpo di massa m ed il piano inclinato.

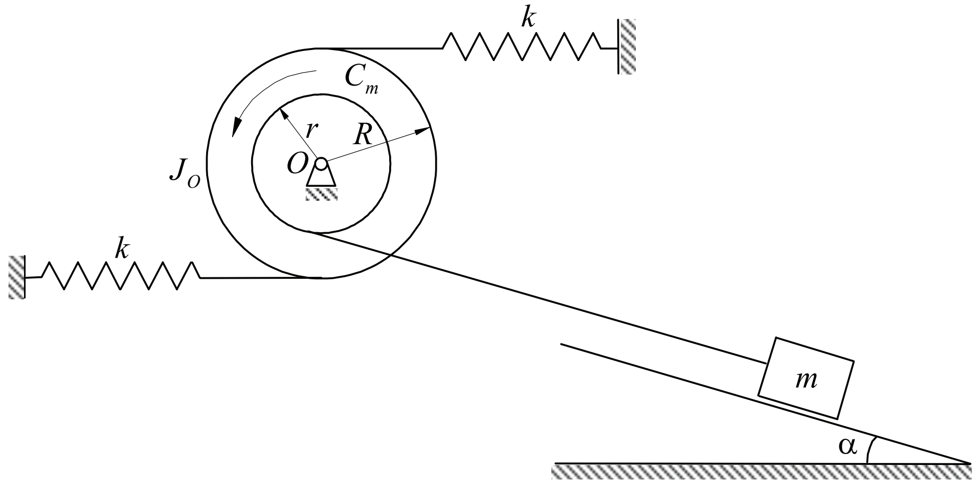


Figura 1

Dati

- Massa del carico trascinato .... $m = 15$ kg
- Momento d'inerzia del gruppo puleggia-tamburo .... $J_0 = 1$ kg m^2
- Rigidezza delle molle .... $k = 40$ kN/m
- Raggio della puleggia .... $R = 0.2$ m
- Raggio del tamburo di avvolgimento della fune .... $r = 0.1$ m
- Pendenza del piano inclinato .... $\alpha = 20°$
- Ampiezza della coppia applicata al gruppo puleggia-tamburo .... $C_0 = 400$ Nm
- Pulsazione della coppia applicata al gruppo puleggia-tamburo .... $\Omega = 20$ rad/s

Soluzione

Poiché la fune è inestensibile, il sistema ha un solo grado di libertà; per descrivere il moto utilizziamo come coordinata libera la rotazione ϑ del tamburo (positiva antioraria), misurata a partire dalla posizione di equilibrio statico; in corrispondenza di tale rotazione la massa m trasla lungo il piano inclinato di una quantità $x = r\vartheta$.
Le forze agenti sul sistema durante il moto libero (cioè in assenza della coppia forzante C_m) sono evidenziate nella Figura 2, nella quale si è indicata con il simbolo δ la deformazione statica subita dalle molle per effetto della forza peso.
Da semplici considerazioni di equilibrio si ricava per tale deformazione il valore:

$$\delta = \frac{mgr \sin \alpha}{2kR} \tag{1}$$

Le equazioni di equilibrio dinamico sono le seguenti:

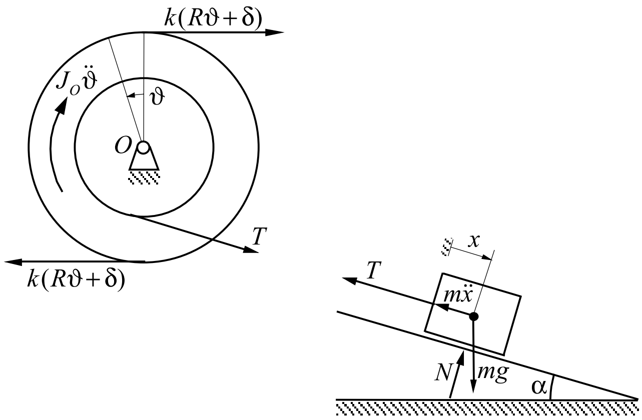


Figura 2

- Equilibrio alla rotazione attorno ad O per il tamburo:

$$J_O\ddot{\vartheta} + 2Rk(R\vartheta + \delta) - Tr = 0 \tag{2}$$

- Equilibrio alla traslazione della massa m lungo il piano inclinato:

$$m\ddot{x} + T - mg\sin\alpha = 0 \tag{3}$$

Da quest'ultima equazione è possibile ricavare il valore della tensione T della fune:

$$T = m(g\sin\alpha - \ddot{x}) = m(g\sin\alpha - r\ddot{\vartheta}) \tag{4}$$

Sostituendo il valore di T fornito dalla (4) nell'equazione (2) e tenendo conto della (1) si ottiene l'equazione di moto relativa alle vibrazioni libere del sistema:

$$(J_O + mr^2)\ddot{\vartheta} + 2kR^2\vartheta = 0 \tag{5}$$

Come si può notare, avendo assunto come origine per la coordinata libera la posizione di equilibrio statico, nell'equazione (5) non compare il termine gravitazionale. La pulsazione propria vale:

$$\omega = \sqrt{\frac{2kR^2}{J_O + mr^2}} = 52.75 \text{ rad/s} \tag{6}$$

Nel caso in cui venga applicata al tamburo una coppia esterna variabile nel tempo con legge armonica, l'equazione di moto diventa:

$$(J_O + mr^2)\ddot{\vartheta} + 2kR^2\vartheta = C_0\sin\Omega t \tag{7}$$

e la soluzione a regime si può scrivere nella forma:

$$\vartheta(t) = \Theta\sin(\Omega t - \varphi) \tag{8}$$

dove $\varphi = 0$ se $\Omega/\omega < 1$ e $\varphi = \pi$ se $\Omega/\omega > 1$. Nel nostro caso, essendo $\Omega/\omega = 0.379 < 1$ lo sfasamento φ risulta nullo.
L'ampiezza di vibrazione a regime si ricava sostituendo la soluzione $\vartheta(t)$ data dalla (8) e la sua derivata seconda nell'equazione di moto (7), semplificando i termini armonici e risolvendo il tutto rispetto a Θ; con semplici passaggi si ottiene:

$$\Theta = \frac{C_0}{2kR^2 - \Omega^2(J_O + mr^2)} = 0.146 \text{ rad} = 8.36° \tag{9}$$

La soluzione a regime è quindi:

$$\theta(t) = 0.146\sin 20t \tag{10}$$

dove t è espresso in secondi e ϑ in radianti.

Nota. Affinché il sistema assegnato possa funzionare, occorre che nella fune sia sempre presente una forza di trazione (infatti una fune non può resistere a compressione); utilizzando la relazione (4) si può calcolare la legge con cui varia il tiro della fune durante il moto:

$$T = mg \sin \alpha + mr\Omega^2 \Theta \sin \Omega t \tag{11}$$

Il valore minimo di tale tensione si ha per $\sin \Omega t = -1$, ovvero:

$$T_{min} = mg \sin \alpha - mr\Omega^2 \Theta = -37.2 \text{ N} \tag{12}$$

Poiché tale valore risulta negativo la fune non è sempre in grado di trasmettere il movimento alla massa traslante lungo il piano inclinato.
Occorre allora sostituire la fune con un elemento in grado di resistere anche a compressione; a tale scopo si potrebbe utilizzare un'asta a cremagliera, opportunamente guidata, in grado di accoppiarsi con una ruota dentata di raggio primitivo r, montata in sostituzione del tamburo di avvolgimento della fune; in alternativa, si potrebbe continuare ad utilizzare la fune, incrementando però la parte statica del tiro mediante un adeguato aumento dell'angolo α (ad esempio, se si impone un'inclinazione $\alpha = 60°$ si ottiene $T_{min} = 39.8$ N > 0).

Esercizio 5 - Cod. VIB-006

Determinare il valore minimo del coefficiente di aderenza μ che consente al rullo di rotolare senza strisciare sul piano di appoggio, quando il carrello si muove con legge di moto $y(t) = Y \sin \Omega t$.
Nota. Si consideri soltanto la soluzione a regime, trascurando il transitorio.

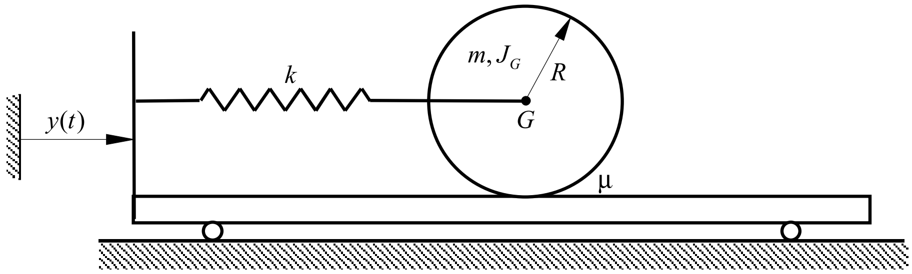


Figura 1

Dati

- Massa del rullo .... m
- Momento d'inerzia baricentrico del rullo .... J_G
- Rigidezza della molla .... k
- Raggio del rullo .... R
- Ampiezza dello spostamento armonico .... Y
- Pulsazione dello spostamento armonico .... Ω
- Coefficiente di aderenza fra rullo e piano .... μ

Soluzione

Metodo n.1

Indichiamo con ϑ la rotazione del rullo e con z la posizione del suo baricentro, misurata relativamente al carrello (vedi Figura 2).

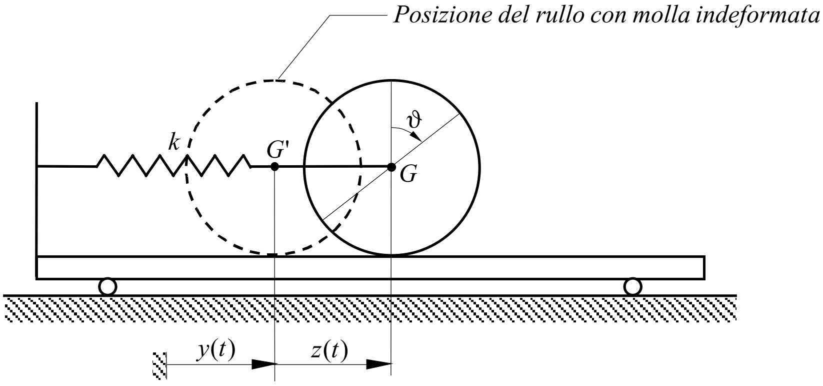


Figura 2

Se il rullo rotola senza strisciare sul piano del carrello, la relazione cinematica fra z e ϑ è la seguente:

$$\vartheta = \frac{z}{R} \tag{1}$$

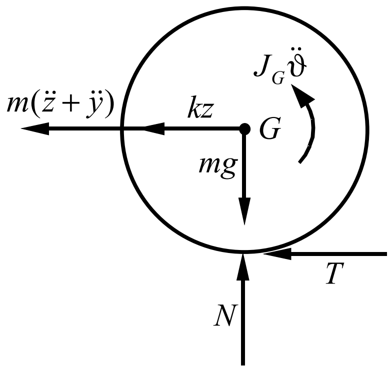


Figura 3

Durante il moto agiscono sul rullo le forze e coppie indicate nel diagramma di corpo libero rappresentato in Figura 3:
A questo punto è immediato ricavare le equazioni di equilibrio dinamico del rullo:
Equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$m(\ddot{z}+\ddot{y}) + kz + T = 0 \tag{2}$$

Equilibrio alla traslazione verticale:

$$N = mg \tag{3}$$

Equilibrio alla rotazione attorno al baricentro:

$$TR = J_G\ddot{\vartheta} \tag{4}$$

Ricavando dalla (4) la reazione T e tenendo conto della relazione cinematica (1) si ha:

$$T = \frac{J_G}{R^2}\ddot{z} \tag{5}$$

Sostituendo tale valore nella (2) si ricava, con semplici passaggi, l'equazione di moto:

$$\left(m + \frac{J_G}{R^2}\right)\ddot{z} + kz = -m\ddot{y} \tag{6}$$

La pulsazione propria vale:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \dfrac{J_G}{R^2}}} = \sqrt{\frac{k}{m_{eq}}} \tag{7}$$

avendo posto $m_{eq} = m + J_G/R^2$.
Poiché la causa eccitatrice è di natura armonica con pulsazione Ω, la soluzione a regime della (6) sarà del tipo:

$$z(t) = Z\sin(\Omega t - \varphi) \tag{8}$$

La fase φ è nulla se $\Omega/\omega < 1$, mentre vale π radianti se $\Omega/\omega > 1$.
L'ampiezza di vibrazione Z si calcola sostituendo la (8) e la sua derivata seconda nell'equazione di moto (6); dopo alcune semplificazioni si ricava:

$$Z = \frac{m\Omega^2 Y}{|k - m_{eq}\Omega^2|} \tag{9}$$

L'accelerazione relativa $\ddot{z}$ del baricentro del rullo risulta:

$$\ddot{z}(t) = -\Omega^2 z(t) = -\frac{m\Omega^4 Y}{|k - m_{eq}\Omega^2|}\sin(\Omega t - \varphi) \tag{10}$$

ed il suo valore massimo è:

$$|\ddot{z}_{max}| = \frac{m\Omega^4 Y}{|k - m_{eq}\Omega^2|} \tag{11}$$

Affinché il rullo non slitti sul piano del carrello occorre che, nella situazione più sfavorevole (ovvero quando $T = T_{max}$), risulti comunque verificata la relazione di Coulomb:

$$\mu \geq \frac{|T_{max}|}{|N|} \tag{12}$$

Il valore della reazione tangenziale massima T_{max} si ricava facilmente dalla (5) e dalla (11):

$$|T_{max}| = \frac{J_G}{R^2}|\ddot{z}_{max}| = \frac{J_G}{R^2}\frac{m\Omega^4 Y}{|k - m_{eq}\Omega^2|} \tag{13}$$

per cui, dalla (12), si ha:

$$\mu \geq \frac{J_G \Omega^4 Y}{gR^2|k - m_{eq}\Omega^2|} = \mu_{min} \tag{14}$$

Metodo n.2

Anziché utilizzare la coordinata relativa z, individuiamo la posizione del baricentro G mediante la coordinata assoluta x (vedi Figura 4).

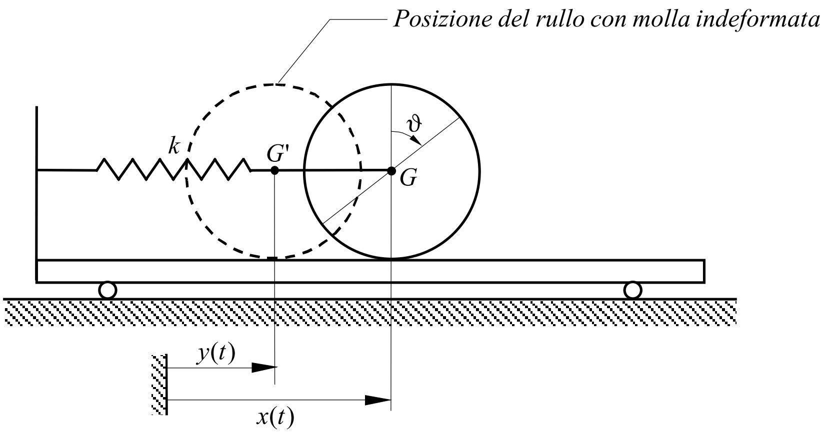


Figura 4

La relazione cinematica fra x e ϑ, nell'ipotesi di non strisciamento, è:

$$\vartheta = \frac{x - y}{R} \tag{15}$$

Le azioni sul rullo sono evidenziate in Figura 5:

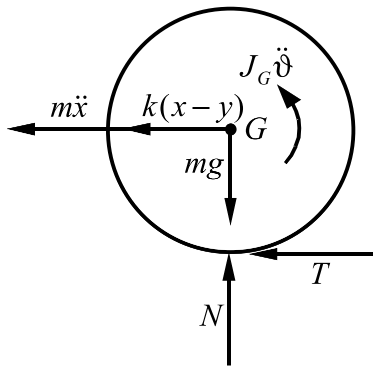


Figura 5

Le equazioni di equilibrio dinamico si possono allora scrivere nella forma sotto riportata:
Equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$m\ddot{x} + k(x - y) + T = 0 \tag{16}$$

Equilibrio alla traslazione verticale:

$$N = mg \tag{17}$$

Equilibrio alla rotazione attorno al baricentro:

$$TR = J_G\ddot{\vartheta} \tag{18}$$

Procedendo in modo analogo al caso precedente si ricavano le seguenti relazioni:

$$T = \frac{J_G}{R^2}(\ddot{x} - \ddot{y}) \tag{19}$$

$$m_{eq}\ddot{x} + kx = ky + \frac{J_G}{R^2}\ddot{y} \tag{20}$$

Sostituendo nel secondo membro della (20) l'espressione di $y(t)$ e della sua derivata seconda si ottiene:

$$m_{eq}\ddot{x} + kx = \left(k - \frac{J_G}{R^2}\Omega^2\right) Y \sin\Omega t = F_0 \sin\Omega t \tag{21}$$

avendo posto, per semplicità di scrittura, $F_0 = \left(k - \frac{J_G}{R^2}\Omega^2\right) Y$.
La soluzione a regime è:

$$x(t) = X\sin(\Omega t - \varphi) \tag{22}$$

dove φ assume gli stessi valori visti nel caso precedente, mentre l'ampiezza X vale:

$$X = \frac{F_0}{|k - m_{eq}\Omega^2|} \tag{23}$$

L'accelerazione assoluta $\ddot{x}$ del baricentro del rullo risulta:

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 x(t) = -\frac{\Omega^2 F_0}{|k - m_{eq}\Omega^2|}\sin(\Omega t - \varphi) \tag{24}$$

Dalla (19) si può dedurre la legge con cui varia la reazione tangenziale T durante il movimento:

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{J_G}{R^2}(\ddot{x}(t) - \ddot{y}(t)) = \frac{J_G}{R^2}\Omega^2(-X + Y)\sin(\Omega t - \varphi) \\ &= \frac{J_G}{R^2}\Omega^2\left(-\frac{F_0}{|k - m_{eq}\Omega^2|} + Y\right)\sin(\Omega t - \varphi) \end{aligned} \tag{25}$$

Ricordando la definizione di F_0, si può ottenere della (25) il valore massimo T_{max} della reazione tangenziale:

$$|T_{max}| = \frac{J_G}{R^2}\Omega^2\left(Y - \frac{\left(k - \frac{J_G}{R^2}\Omega^2\right)Y}{|k - m_{eq}\Omega^2|}\right) = \frac{J_G}{R^2}\frac{m\Omega^4 Y}{|k - m_{eq}\Omega^2|} \tag{26}$$

Come si può notare, il valore di T_{max} calcolato mediante la (26) è uguale a quello ricavato precedentemente (vedi equazione (13)); tutto questo conferma la correttezza dei calcoli svolti.

Esercizio 6 - Cod. VIB-007

Il sistema in Figura 1, collocato in un piano verticale, è eccitato mediante uno spostamento di tipo armonico $y(t) = Y \sin \Omega t$ impresso all'estremo A della molla.
Supponendo che il rullo non slitti sul piano di rotolamento, determinare il valore massimo dell'ampiezza Y per cui, in condizioni di vibrazioni a regime, il tiro della fune non si annulla.

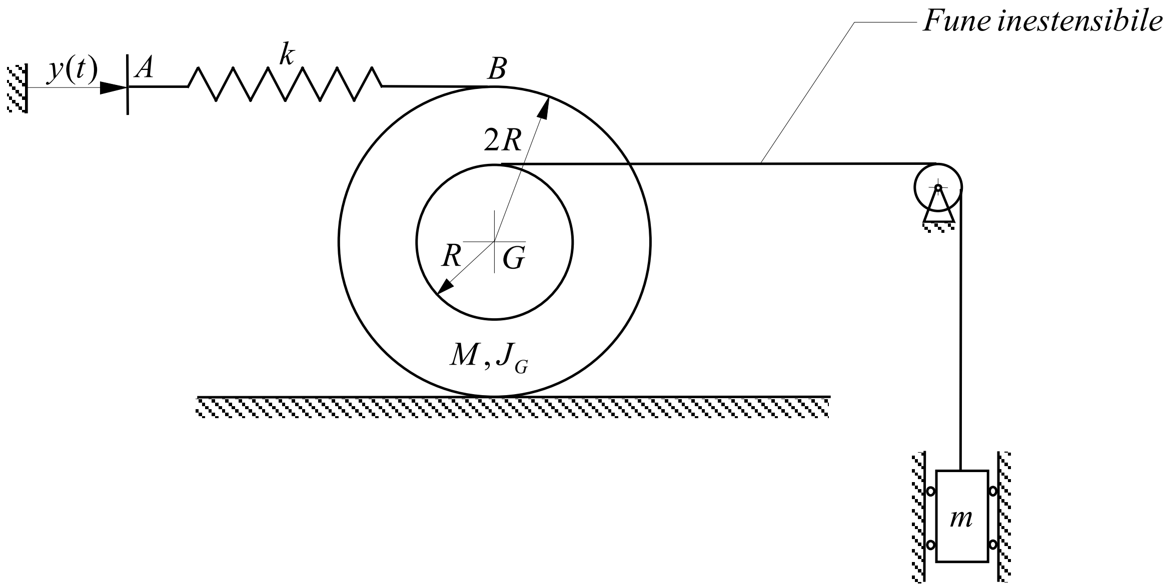


Figura 1

Dati

- Massa dei rulli coassiali .... M
- Momento d'inerzia baricentrico dei rulli coassiali .... J_G
- Massa traslante in direzione verticale .... m
- Rigidezza della molla .... k
- Raggio del rullo piccolo .... R
- Raggio del rullo grande .... $2R$
- Ampiezza dello spostamento armonico .... Y
- Pulsazione dello spostamento armonico .... Ω

Soluzione

Indichiamo con ϑ la rotazione del rullo e con x lo spostamento della massa m; entrambe le coordinate sono misurate a partire dalla posizione di equilibrio statico. Risolviamo l'esercizio con il metodo degli equilibri dinamici; a tale scopo evidenziamo le forze agenti sui componenti del sistema:
Nella Figura 2 si è indicata con δ la deformazione statica subita dalla molla per effetto del peso mg; con semplici considerazioni di equilibrio si può verificare che tale deformazione vale:

$$\delta = \frac{3mg}{4k} \tag{1}$$

A questo punto è possibile scrivere le seguenti equazioni di equilibrio dinamico:
Equilibrio alla rotazione per il rullo attorno al punto C (centro di istantanea rotazione):

$$T \cdot 3R - k(4R\vartheta - y + \delta) \cdot 4R - J_G\ddot{\vartheta} - 2MR\ddot{\vartheta} \cdot 2R = 0 \tag{2}$$

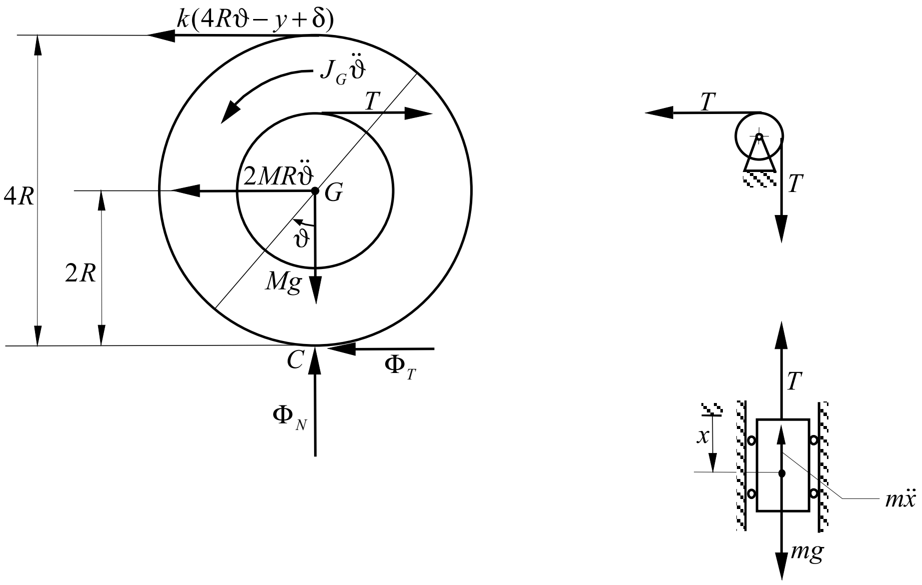


Figura 2

Equilibrio alla traslazione verticale per la massa m:

$$T + m\ddot{x} = mg \tag{3}$$

Poiché il rullo rotola senza strisciare e la fune è inestensibile, l'abbassamento verticale x della massa m e la rotazione ϑ del rullo sono legati dalla seguente relazione cinematica:

$$x = 3R\vartheta \tag{4}$$

Pertanto il sistema ha un solo grado di libertà: ciò significa che è sufficiente una sola coordinata per descrivere il suo moto.
Dalla (3) è possibile ricavare la tensione T della fune; sostituendo il valore di T così calcolato nell'equazione (2) e tenendo conto delle relazioni (1) e (4) si perviene, dopo semplici passaggi, all'equazione di moto del sistema:

$$(J_G + 4MR^2 + 9mR^2)\ddot{\vartheta} + 16kR^2\vartheta = 4kRy \tag{5}$$

La pulsazione propria è:

$$\omega = \sqrt{\frac{16kR^2}{J_G + 4MR^2 + 9mR^2}} = \sqrt{\frac{16kR^2}{J_{eq}}} \tag{6}$$

avendo posto $J_{eq} = J_G + 4MR^2 + 9mR^2$.
Poiché il sistema è eccitato da uno spostamento armonico del vincolo $y(t) = Y \sin \Omega t$, la soluzione a regime $\vartheta(t)$ sarà ancora di tipo armonico, con pulsazione pari a quella della causa eccitatrice; possiamo quindi scrivere:

$$\vartheta(t) = \Theta \sin \Omega t \tag{7}$$

Sostituendo la (7) e la sua derivata seconda nell'equazione di moto (5) e semplificando i termini armonici si ottiene per l'ampiezza a regime Θ il valore sotto riportato:

$$\Theta = \frac{4kRY}{|16kR^2 - \Omega^2 J_{eq}|} \tag{8}$$

L'espressione del tiro della fune in condizioni di regime risulta:

$$\begin{aligned} T(t) &= mg - 3mR\ddot{\vartheta}(t) = mg + 3mR\Omega^2\vartheta(t) \\ &= mg + 3mR\Omega^2 \left(\frac{4kRY}{|16kR^2 - \Omega^2 J_{eq}|} \right) \sin \Omega t \\ &= mg + \frac{12mR^2\Omega^2 kY}{|16kR^2 - \Omega^2 J_{eq}|} \sin \Omega t \end{aligned} \tag{9}$$

Dalla (9) si deduce che il valore minimo del tiro si ha per $\sin \Omega t = -1$; quindi, per ricavare il valore massimo dell'ampiezza Y che in condizioni di regime rende non nullo il tiro della fune, è sufficiente imporre la condizione:

$$T_{min} = mg - \frac{12mR^2\Omega^2 kY}{|16kR^2 - \Omega^2 J_{eq}|} \geq 0 \tag{10}$$

e risolvere la disequazione rispetto a Y; con semplici passaggi si ottiene:

$$Y \leq \frac{g|16kR^2 - J_{eq}\Omega^2|}{12kR^2\Omega^2} = Y_{max} \tag{11}$$

Esercizio 7 - Cod. VIB-008

Il sistema vibrante rappresentato in Figura 1 è collocato in un piano verticale ed è costituito dai seguenti elementi:

- una coppia di dischi (1) e (2) aventi raggio r_1 ed r_2 e momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione J_1 e J_2 rispettivamente;
- un'asta O_2P, solidale con il disco (2), avente lunghezza pari ad l e massa trascurabile;
- una massa puntiforme m collocata in corrispondenza del punto P;
- una molla di rigidezza k, che risulta scarica quando l'asta O_2P si trova in posizione verticale.

Assumendo l'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio, si chiede di:

1. scrivere l'equazione differenziale relativa alle oscillazioni libere del sistema e determinare la pulsazione propria;
2. determinare l'ampiezza delle vibrazioni in condizioni di regime, quando si applica al disco (1) una coppia esterna con andamento sinusoidale di ampiezza M_0 e frequenza f; si effettui il calcolo: a) nell'ipotesi di smorzamento nullo; b) in presenza di uno smorzatore viscoso (visibile nel riquadro tratteggiato) avente una costante di smorzamento c assegnata.

Nota. Si supponga assenza di slittamento fra i due dischi.

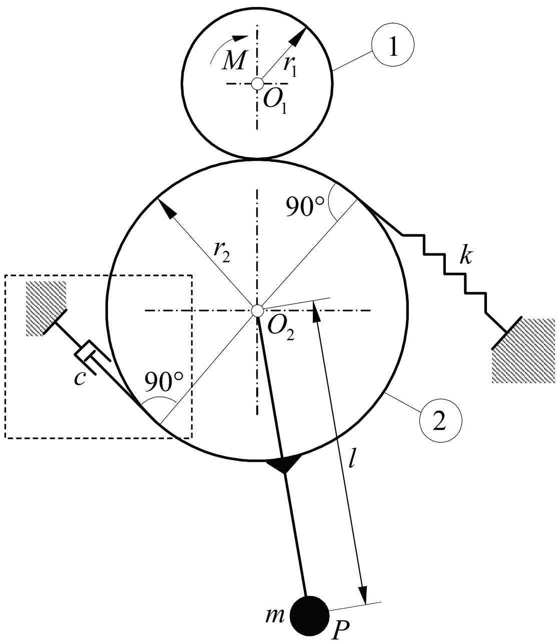


Figura 1

Dati

- Raggio del disco (1) .... $r_1 = 0.1$ m
- Raggio del disco (2) .... $r_2 = 0.2$ m
- Momento d'inerzia del disco (1) .... $J_1 = 5 \times 10^{-3}$ kgm^2
- Momento d'inerzia del disco (2) .... $J_2 = 4 \times 10^{-2}$ kgm^2
- Lunghezza dell'asta O_2P .... $l = 1$ m
- Massa del punto P .... $m = 2$ kg
- Rigidezza della molla .... $k = 20000$ N/m
- Costante di smorzamento .... $c = 1000$ Nm^{-1}s
- Ampiezza della coppia applicata al disco (0) .... $M_0 = 18$ Nm
- Frequenza della coppia applicata al disco (1) .... $f = 2$ Hz

Soluzione

Risolviamo il problema con il metodo degli equilibri dinamici, mettendo in evidenza le forze e le coppie agenti durante il moto sui singoli componenti del sistema; indichiamo con ϑ_1 la rotazione del disco (1) (positiva in senso orario) e con ϑ_2 la rotazione del disco (2) (positiva in senso antiorario).
Nel caso di vibrazioni libere in assenza di smorzamento si ha la situazione riportata nella Figura 2:

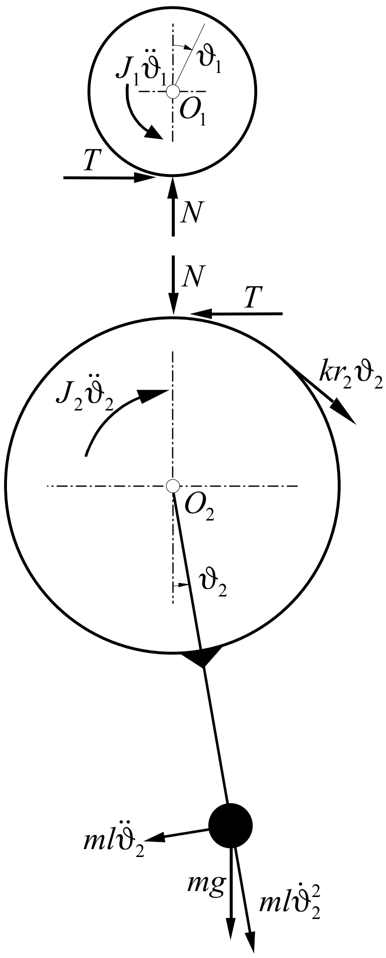


Figura 2

Moto libero

Le equazioni di equilibrio alla rotazione attorno ai perni O_1 e O_2 sono:

$$\begin{cases} Tr_1 + J_1\ddot{\vartheta}_1 = 0 \\ \\ J_2\ddot{\vartheta}_2 + kr_2^2\vartheta_2 + ml^2\ddot{\vartheta}_2 + mgl\sin\vartheta_2 - Tr_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Ricavando T dalla prima equazione e sostituendo il valore così ottenuto nella seconda si ha:

$$(J_2 + ml^2)\ddot{\vartheta}_2 + kr_2^2\vartheta_2 + mgl\sin\vartheta_2 + \frac{r_2}{r_1}J_1\ddot{\vartheta}_1 = 0 \tag{2}$$

Per piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio (pendolo verticale) si ha $\sin\vartheta \cong \vartheta$; inoltre, ipotizzando assenza di slittamento fra i due dischi, è possibile definire il rapporto di trasmissione τ nel modo seguente:

$$\tau = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{r_1}{r_2} = 0.5 \tag{3}$$

Tenendo conto della (3) l'equazione di moto (2) diventa:

$$\left(\frac{J_1}{\tau^2} + J_2 + ml^2\right)\ddot{\vartheta}_2 + (kr_2^2 + mgl)\vartheta_2 = 0 \tag{4}$$

La pulsazione propria risulta:

$$\omega = \sqrt{\frac{kr_2^2 + mgl}{\frac{J_1}{\tau^2} + J_2 + ml^2}} = 19.95 \text{ rad/s} \tag{5}$$

Moto forzato (in assenza di smorzamento)

Nel caso di moto forzato in assenza di smorzamento le equazioni di equilibrio alla rotazione diventano:

$$\begin{cases} Tr_1 + J_1\ddot{\vartheta}_1 - M_0 \sin \Omega t = 0 \\ J_2\ddot{\vartheta}_2 + kr_2^2\vartheta_2 + ml^2\ddot{\vartheta}_2 + mgl \sin \vartheta_2 - Tr_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

dove $\Omega = 2\pi f = 12.56$ rad/s.
Procedendo come nel caso precedente si ottiene:

$$\left(\frac{J_1}{\tau^2} + J_2 + ml^2\right)\ddot{\vartheta}_2 + (kr_2^2 + mgl)\vartheta_2 = \frac{M_0}{\tau} \sin \Omega t \tag{7}$$

Per semplicità di scrittura poniamo:

$$\begin{aligned} J_{eq} &= \frac{J_1}{\tau^2} + J_2 + ml^2 = 2.06 \text{ kgm}^2 \\ k_{eq} &= kr_2^2 + mgl = 819.02 \text{ Nm} \\ M_{eq} &= \frac{M_0}{\tau} = 36 \text{ Nm} \end{aligned} \tag{8}$$

Con queste definizioni la (7) diviene:

$$J_{eq}\ddot{\vartheta}_2 + k_{eq}\vartheta_2 = M_{eq} \sin \Omega t \tag{9}$$

La soluzione a regime è del tipo:

$$\vartheta_2(t) = \Theta_2 \sin(\Omega t - \varphi) \tag{10}$$

In assenza di smorzamento l'ampiezza di oscillazione risulta:

$$\Theta_2 = \frac{M_{eq}}{|k_{eq} - \Omega^2 J_{eq}|} = 0.0728 \text{ rad} = 4.17^\circ \tag{11}$$

mentre la fase φ risulta nulla in quanto $\Omega/\omega = 0.60 < 1$.

Moto forzato (in presenza di smorzamento)

Inserendo nel sistema uno smorzatore viscoso nella posizione indicata dal testo, occorre considerare nell'equilibrio alla rotazione della puleggia maggiore una coppia smorzante M_{sm} di valore:

$$M_{sm} = F_{sm} \cdot r_2 = c \cdot r_2\dot{\vartheta}_2 \cdot r_2 = cr_2^2\dot{\vartheta}_2 \tag{12}$$

Se si pone:

$$c_{eq} = cr_2^2 = 40 \text{ Nms} \tag{13}$$

l'equazione di moto per vibrazioni forzate in presenza di smorzamento risulta:

$$J_{eq}\ddot{\vartheta}_2 + c_{eq}\dot{\vartheta}_2 + k_{eq}\vartheta_2 = M_{eq} \sin \Omega t \tag{14}$$

La soluzione a regime di tale equazione si può ancora scrivere nella forma (10), ma l'ampiezza e la fase valgono ora:

$$\Theta_2 = \frac{M_{eq}}{\sqrt{(k_{eq} - \Omega^2 J_{eq})^2 + (c_{eq}\Omega)^2}} = 0.051 \text{ rad} = 2.9° \tag{15}$$

$$\tan\varphi = \frac{c_{eq}\Omega}{k_{eq} - \Omega^2 J_{eq}} = 1.017 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 0.794 \text{ rad} = 45.5° \tag{16}$$

Confrontando i valori dell'ampiezza a regime nei due casi, si osserva che in presenza di smorzamento l'ampiezza a regime risulta ridotta di circa il 30%.
Nei grafici di Figura 3 viene riportato, in funzione della pulsazione della forzante, l'andamento dell'ampiezza e della fase per il moto a regime in assenza di smorzamento (linea tratteggiata) ed in presenza di smorzamento (linea continua).

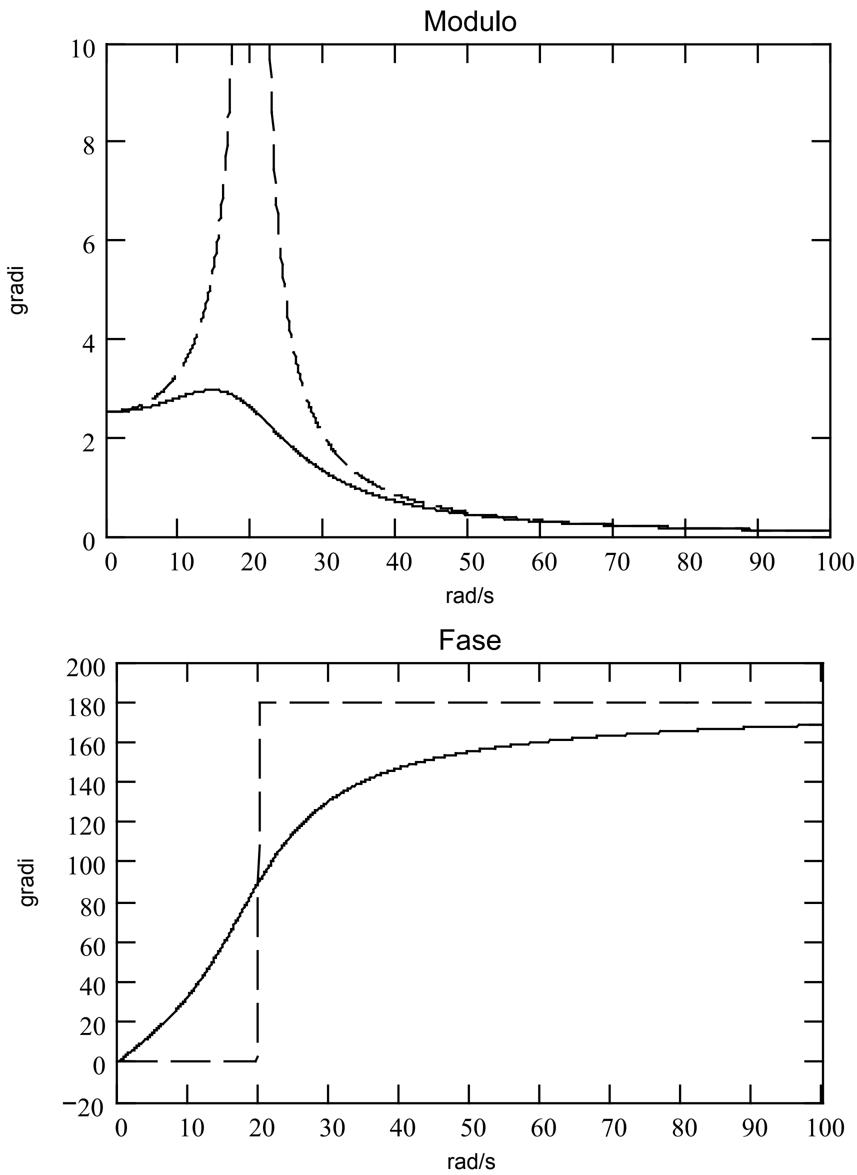


Figura 3

Esercizio 8 - Cod. VIB-009

Un'autovettura in marcia lungo una strada liscia incontra improvvisamente un tratto di carreggiata sconnesso con profilo approssimativamente sinusoidale.
Si schematizzi l'automobile come una massa m collegata al terreno con una molla verticale di rigidezza k e l'andamento della strada con un profilo sinusoidale di ampiezza Y e lunghezza d'onda l.
Assumendo che la costante di smorzamento sia pari a c, si richiede di determinare:

1. l'espressione analitica in transitorio e a regime del moto oscillatorio dell'autovettura, supponendo che essa viaggi alla velocità $v = 72$ km/h;
2. il tempo approssimativamente necessario affinché il sistema giunga a regime;
3. la velocità per cui la vettura entra in risonanza;
4. i valori di velocità in corrispondenza dei quali l'ampiezza massima delle oscillazioni a regime risulti inferiore a 4 cm.

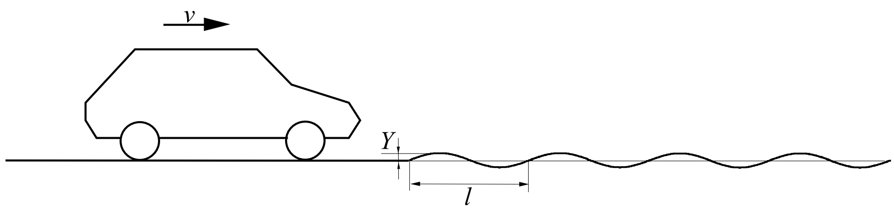


Figura 1

Dati

- Massa dell'autovettura .... $m = 1200$ kg
- Rigidezza della molla .... $k = 90$ kN/m
- Costante di smorzamento .... $c = 2000$ Ns/m
- Ampiezza del profilo sinusoidale .... $Y = 3$ cm
- Lunghezza d'onda del profilo sinusoidale .... $l = 5$ m

Soluzione

Determinazione dell'espressione analitica del moto oscillatorio dell'autovettura

Per lo studio delle oscillazioni verticali dell'autovettura il testo suggerisce di schematizzare il veicolo mediante il modello riportato nella Figura 2.

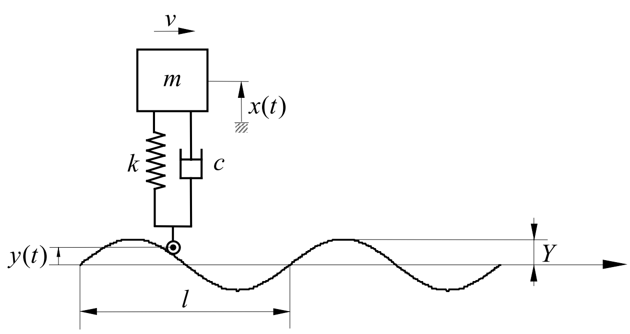


Figura 2

Misurando lo spostamento verticale x a partire dalla posizione di equilibrio statico (molla deformata sotto l'azione del peso $P = mg$), l'equazione di moto risulta:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \tag{1}$$

Il profilo della strada $y(t)$ può essere schematizzato mediante una sinusoide di ampiezza Y e di pulsazione Ω, il cui valore risulta funzione della lunghezza d'onda l del profilo e della velocità v del veicolo; infatti, nell'ipotesi che l'automobile mantenga costante la sua velocità, il tempo T (detto periodo della sinusoide) impiegato a percorrere un tratto di strada sconnesso di lunghezza l sarà pari a l/v; la pulsazione risulterà pertanto:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{l} \tag{2}$$

L'espressione analitica del profilo stradale sarà quindi:

$$y(t) = Y \sin \Omega t \tag{3}$$

Con i dati del problema si ha:

$$\begin{aligned} & v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s} \\ & \Omega = \frac{2\pi v}{l} = 25.13 \text{ rad/s} \\ & T = \frac{l}{v} = 0.25 \text{ s} \end{aligned} \tag{4}$$

Derivando la (3) si ottiene:

$$\dot{y}(t) = \Omega Y \cos \Omega t \tag{5}$$

Tenendo conto delle relazioni (3) e (5) l'equazione di moto (1) può essere riscritta nella forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY \sin \Omega t + c\Omega Y \cos \Omega t \tag{6}$$

La soluzione $x(t)$ di tale equazione, come è noto, è data dalla somma di due termini: l'integrale generale $x_{gen}(t)$ dell'omogenea associata e l'integrale particolare $x_{part}(t)$ dell'equazione completa.

Calcolo dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata

Per determinare l'espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata occorre in primo luogo verificare se il sistema risulta sottosmorzato, sovrasmorzato o in condizioni di smorzamento critico; calcoliamo pertanto il fattore di smorzamento ξ:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega} \tag{7}$$

dove c_{cr} indica lo smorzamento critico ed ω la pulsazione propria del sistema.
Con i valori numerici assegnati si ricava:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 8.66 \text{ rad/s} \qquad \xi = \frac{\mathrm{c}}{2\mathrm{m}\omega} = 0.096 \tag{8}$$

Poiché risulta $\xi < 1$ il sistema è sottosmorzato; definendo ora la pulsazione propria smorzata nel modo seguente:

$$\omega_s = \omega\sqrt{1 - \xi^2} = 8.62 \text{ rad/s} \tag{9}$$

l'integrale generale dell'equazione omogenea associata si può scrivere nella forma:

$$x_{gen}(t) = e^{-\xi\omega t}(A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t) \tag{10}$$

dove A e B rappresentano due costanti ricavabili mediante le condizioni iniziali.

Calcolo dell'integrale particolare dell'equazione completa

L'integrale particolare dell'equazione completa fornisce la soluzione dell'equazione di moto in condizioni di regime sinusoidale permanente; per il caso in esame (moto forzato dovuto allo spostamento del vincolo) tale soluzione è del tipo:

$$x_{part}(t) = X \sin(\Omega t - \varphi) \tag{11}$$

dove

$$X = Y \sqrt{\frac{k^2 + (c\Omega)^2}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} = 4.62 \times 10^{-3} \text{ m} \tag{12}$$

$$\tan\varphi = \frac{mc\Omega^3}{k(k - m\Omega^2) + (c\Omega)^2} = -0.662 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 2.557 \text{ rad} = 146.5° \tag{13}$$

Pertanto la soluzione dell'equazione di moto è:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}(A\cos\omega_s t + B\sin\omega_s t) + X\sin(\Omega t - \varphi) \tag{14}$$

Come si è detto, per ricavare le costanti di integrazione A e B occorre conoscere le condizioni iniziali; a tale scopo supponiamo che, nell'istante $t = 0$ in cui l'autovettura incontra il profilo di strada sconnesso, la massa oscillante (scocca del veicolo) si trovi nella posizione di equilibrio con velocità nulla in direzione verticale; con tale ipotesi le condizioni iniziali si possono esprimere nella forma sotto riportata:

$$x(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = 0 \tag{15}$$

Per poter imporre la seconda delle (15) occorre derivare la (14):

$$\dot{x}(t) = e^{-\xi\omega t}[(B\omega_s - \xi\omega A)\cos\omega_s t - (A\omega_s + \xi\omega B)\sin\omega_s t] + \Omega X\cos(\Omega t - \varphi) \tag{16}$$

Dalle (15), tenendo conto delle espressioni (14) e (16) si ricava il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} A + X\sin(-\varphi) = 0 \\ (B\omega_s - \xi\omega A) + \Omega X\cos(-\varphi) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

La soluzione di tale sistema è:

$$\begin{cases} A = X\sin\varphi = 2.55 \times 10^{-3} \text{ m} \\ B = \dfrac{1}{\omega_s}(\xi\omega A - \Omega X\cos\varphi) = 11.47 \times 10^{-3} \text{ m} \end{cases} \tag{18}$$

In definitiva l'equazione (14) può essere riscritta nella forma:

$$x(t) = 10^{-3}\,[e^{-0.833t}(2.55\cos 8.62\,t + 11.47\sin 8.62\,t) + 4.62\sin(25.13\,t - 2.557)] \tag{19}$$

dove x è espresso in metri e t in secondi.
Nei grafici seguenti sono riportati gli andamenti delle funzioni $x_{gen}(t)$, $x_{part}(t)$ e $x(t)$; come si può osservare, il contributo del termine $x_{gen}(t)$ tende ad annullarsi con il trascorrere del tempo.

Calcolo del tempo approssimativamente necessario affinché il sistema giunga a regime

La condizione di regime per il sistema si ha quando si annulla nella (14) il termine corrispondente all'integrale generale dell'equazione omogenea associata $x_{gen}(t)$; ciò si verifica, da un punto di vista strettamente teorico, in un tempo infinito, in quanto, per la presenza del termine esponenziale decrescente, risulta:

$$\lim_{t\to+\infty} x_{gen}(t) = 0 \tag{20}$$

Tuttavia, da un punto di vista pratico, si può ritenere che il sistema abbia raggiunto la condizione di regime quando $x_{gen}(t)$ risulta trascurabile rispetto al contributo dell'integrale particolare dell'equazione completa $x_{part}(t)$;

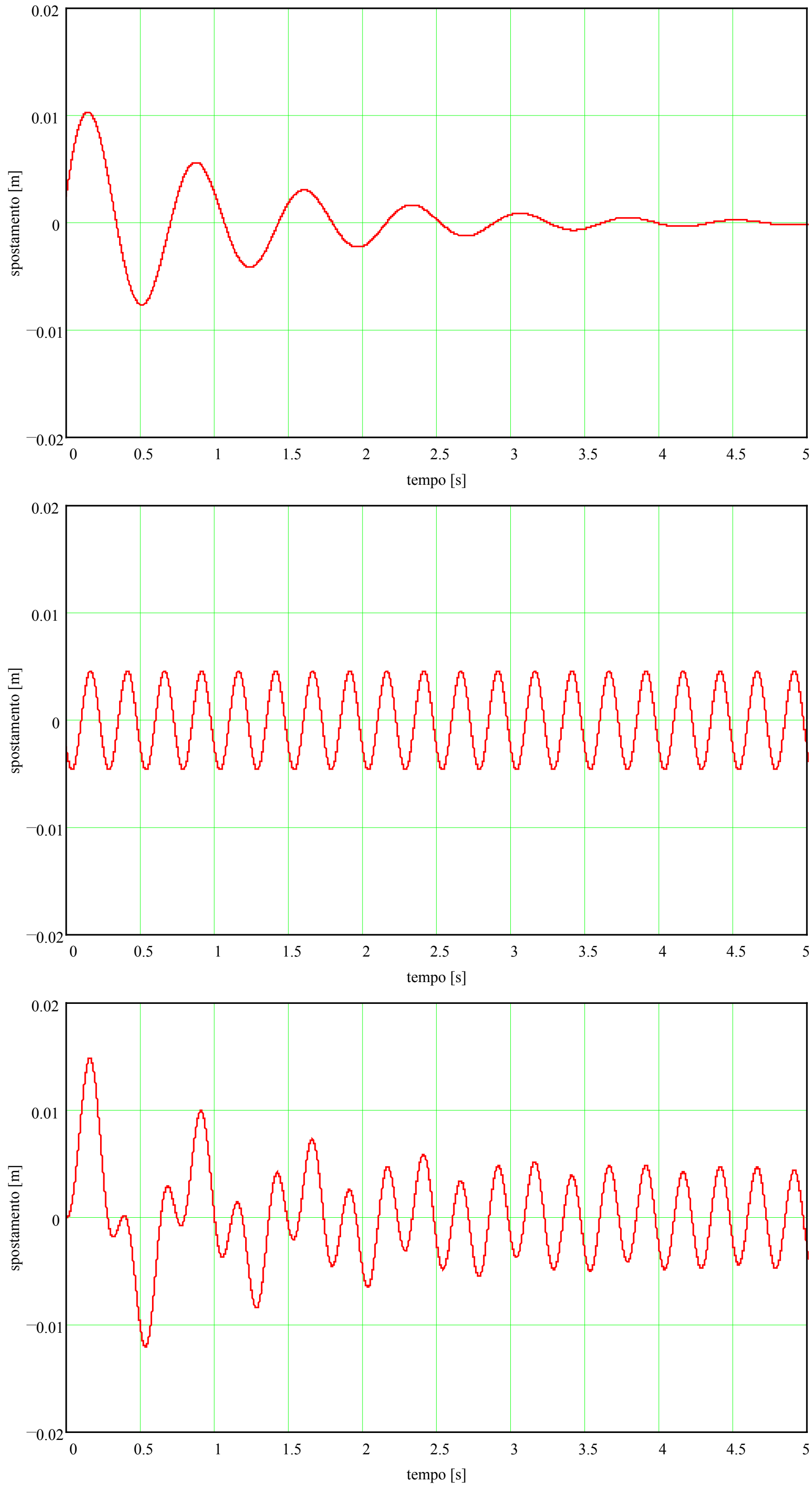


Figura 3 a) Integrale generale dell'equazione omogenea associata $x_{gen}(t)$; b) Integrale particolare dell'equazione completa $x_{part}(t)$; c) Integrale generale dell'equazione completa $x(t) = x_{gen}(t) + x_{part}(t)$.

pertanto, fissata arbitrariamente una soglia $\gamma \ll 1$, si considera esaurito il transitorio quando è verificata la seguente condizione:

$$\frac{\text{Ampiezza di } x_{gen}(t)}{\text{Ampiezza di } x_{part}(t)} \leq \gamma \tag{21}$$

L'ampiezza di $x_{part}(t)$ è data dalla (12), mentre l'ampiezza di $x_{gen}(t)$ si può ricavare riscrivendo la (10) nella forma:

$$x_{gen}(t) = Ce^{-\xi\omega t}\sin(\omega_s t + \alpha) \tag{22}$$

dove si è posto:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \tan\alpha = \frac{A}{B} \tag{23}$$

L'equazione (22) può essere interpretata come l'espressione analitica di una sinusoide con ampiezza $Ce^{-\xi\omega t}$ decrescente nel tempo con legge esponenziale; dalla (21) si ricava pertanto:

$$Ce^{-\xi\omega t} \leq \gamma X \tag{24}$$

ovvero, risolvendo rispetto al tempo:

$$t \geq \frac{1}{\xi\omega}\ln\left(\frac{C}{\gamma X}\right) = t_{reg} \tag{25}$$

Sostituendo nella prima delle (23) i valori di A e B dati dalle (18) si ottiene $C = 11.75 \times 10^{-3}$ m; ponendo infine $\gamma = 1/100$, la disequazione (25) fornisce $t_{reg} \geq 6.65$ s: ciò significa che occorrono poco meno di 7 secondi per raggiungere la condizione di regime[1].

Calcolo della velocità per cui la vettura entra in risonanza

Per calcolare la velocità del veicolo che porta la sospensione in condizioni di risonanza è sufficiente imporre che la pulsazione propria del sistema sia uguale alla pulsazione della forzante:

$$\Omega = \omega \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2\pi v}{l} = \omega \tag{26}$$

Risolvendo rispetto a v si ottiene:

$$v = \frac{\omega l}{2\pi} = 6.89 \text{ m/s} = 24.8 \text{ km/h} \tag{27}$$

Occorre tuttavia precisare che per "risonanza" non si deve intendere soltanto la condizione espressa dalla (26), bensì tutto il campo di frequenze prossime a quella della forzante; infatti, anche per frequenze della forzante poco differenti da quella propria del sistema, si verifica un'amplificazione dell'ampiezza delle vibrazioni a regime, tanto più evidente quanto minore è lo smorzamento.
Di conseguenza, per evitare l'insorgere di vibrazioni con ampiezza eccessiva, è necessario fissare una soglia massima consentita per l'ampiezza delle vibrazioni e verificare che la pulsazione della forzante non sia tale da determinare il superamento del limite imposto (vedi punto successivo).

Calcolo dei valori di velocità per i quali l'ampiezza massima delle oscillazioni a regime risulta inferiore al limite imposto

Per rispondere a questa domanda consideriamo l'equazione (12), che fornisce l'ampiezza delle oscillazioni a regime in funzione della pulsazione Ω della forzante; con semplici passaggi possiamo riscrivere tale equazione della forma:

$$X = Y\sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \tag{28}$$

dove si è posto $r = \Omega/\omega$
Imponendo la condizione $X \leq X_{max}$ e definendo $\alpha = (X_{max}/Y)^2$ si ricava dalla (28) la seguente disequazione:

$$r^4 + 2r^2\left(2\xi^2 - 1 - \frac{2\xi^2}{\alpha}\right) + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \geq 0 \tag{29}$$

[1]Ovviamente il valore di t_{reg} dipende dal valore di γ (arbitrario) che viene inserito nella (25); pertanto quando si determina il tempo necessario per raggiungere la condizione di regime è bene specificare il valore di γ utilizzato per il calcolo.

Utilizzando i dati assegnati si ricava $\alpha = 1.778$, mentre il valore di ξ è già noto dalla seconda delle (8); effettuando il calcolo numerico dei coefficienti della (29) si perviene alla seguente disequazione:

$$r^4 - 1.984\, r^2 + 0.438 \geq 0 \tag{30}$$

Poiché il rapporto r deve risultare necessariamente positivo (si tratta infatti del rapporto fra due pulsazioni), gli intervalli per i quali la disequazione è verificata sono i seguenti:

$$0 \leq r \leq 0.503 \qquad r \geq 1.316 \tag{31}$$

A questo punto, tenendo conto della (2) e della definizione di r, è immediato calcolare i corrispondenti valori della velocità v del veicolo:

$$\begin{aligned} r = r_1 = 0.503 \qquad &\Rightarrow \qquad v_1 = r_1 \frac{l\omega}{2\pi} = 3.46 \text{ m/s} = 12.5 \text{ km/h} \\ r = r_2 = 1.316 \qquad &\Rightarrow \qquad v_2 = r_2 \frac{l\omega}{2\pi} = 9.07 \text{ m/s} = 32.6 \text{ km/h} \end{aligned} \tag{32}$$

In definitiva gli intervalli di velocità in corrispondenza dei quali l'ampiezza della vibrazione a regime non supera il limite imposto sono quindi:

$$0 \leq v \leq v_1 \qquad v \geq v_2 \tag{33}$$

I risultati ottenuti sono riassunti nel diagramma di Figura 4, che fornisce l'ampiezza delle vibrazioni a regime in funzione della velocità del veicolo.

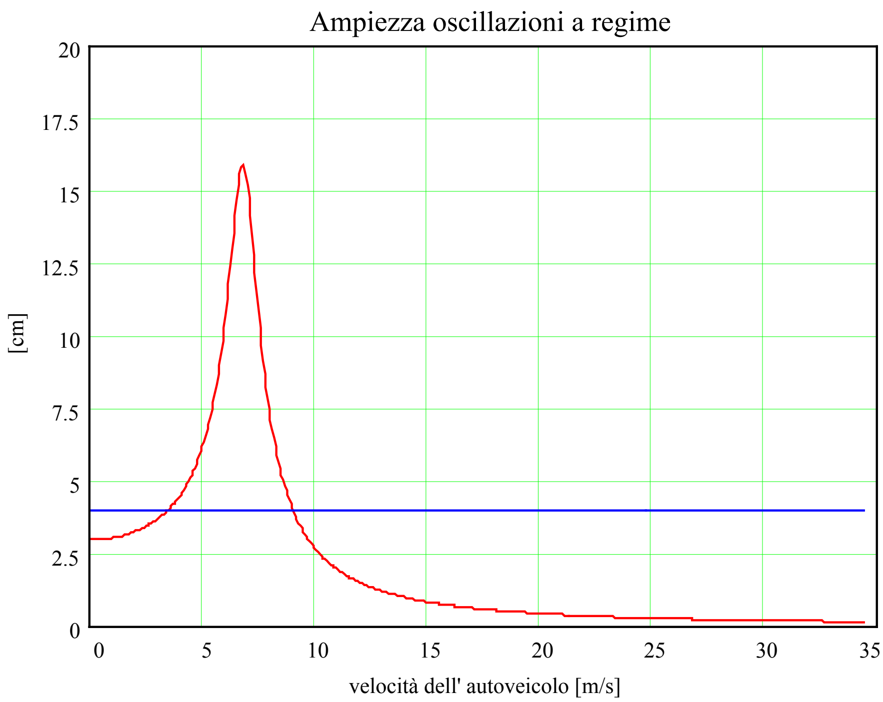


Figura 4

Esercizio 9 - Cod. VIB-010

Il meccanismo rappresentato in Figura 1 è collocato in un piano verticale ed è costituito dai seguenti elementi:

- una ruota dentata di raggio primitivo r e momento d'inerzia baricentrico J ruotante attorno al punto O_2;
- una slitta di massa M, dotata di cremagliera, che si accoppia alla ruota dentata scorrendo in una guida orizzontale;
- un'asta O_2P, solidale con la ruota dentata, avente lunghezza pari ad l e massa trascurabile;
- una massa puntiforme m collocata all'estremità inferiore dell'asta;
- un meccanismo a glifo, la cui manovella O_1A ruota a velocità costante Ω;
- una molla di rigidezza k;
- uno smorzatore viscoso con costante di smorzamento pari a c

Il sistema è in equilibrio quando la manovella O_1A e l'asta O_2P si trovano in posizione verticale. Assumendo l'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio, si chiede di:

1. scrivere l'equazione differenziale di moto del sistema;
2. determinare la pulsazione propria ω ed il fattore di smorzamento ξ;
3. calcolare l'ampiezza e la fase delle vibrazioni in condizioni di regime.

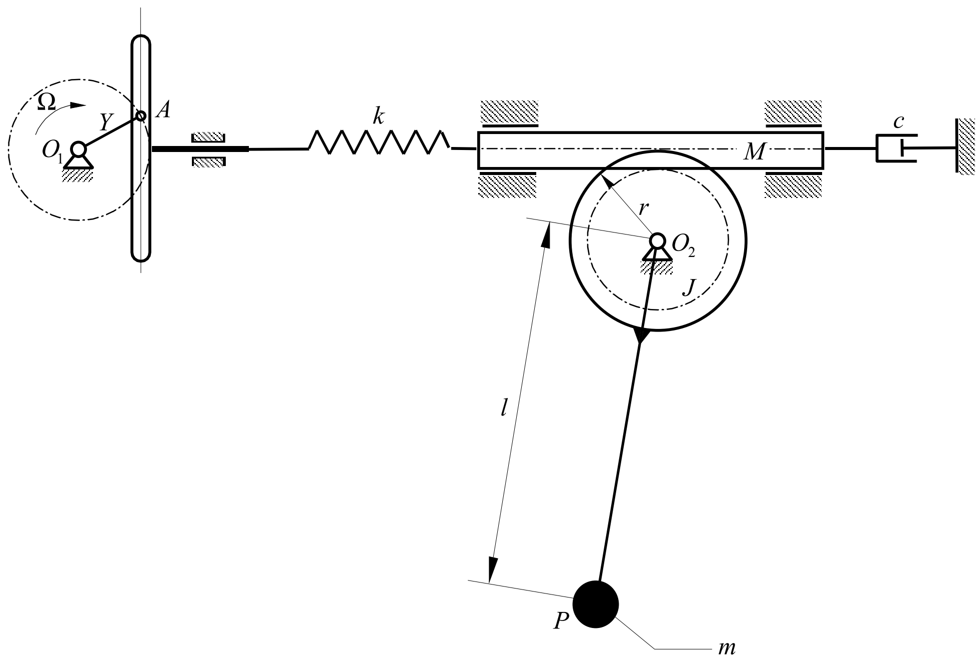


Figura 1

Dati

- Raggio primitivo della ruota dentata .... $r = 0.2$ m
- Momento d'inerzia della ruota dentata .... $J = 0.03$ kg m^2
- Massa della slitta .... $M = 1$ kg
- Lunghezza dell'asta O_2P .... $l = 0.75$ m
- Massa del punto P .... $m = 0.2$ kg
- Rigidezza della molla .... $k = 5000$ N/m
- Costante di smorzamento dello smorzatore viscoso .... $c = 80$ Ns/m
- Lunghezza della manovella O_1A .... $Y = 0.05$ m
- Velocità angolare della manovella O_1A .... $\Omega = 70$ rad/s

Soluzione

Per risolvere il problema applichiamo il metodo degli equilibri dinamici; indicando con x lo spostamento della slitta e con ϑ la rotazione del pendolo, il sistema di forze e coppie agente sul meccanismo durante il movimento è quello indicato nella Figura 2.

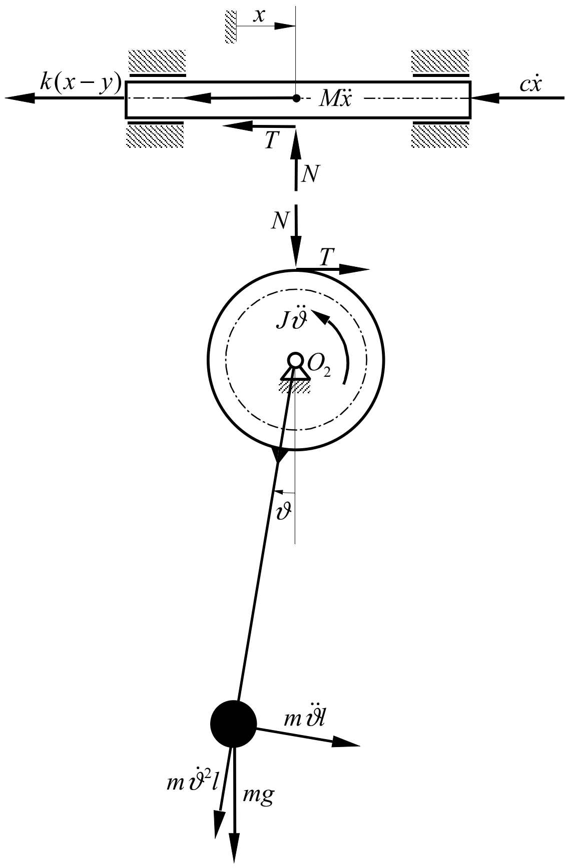


Figura 2

L'equilibrio alla traslazione orizzontale della slitta fornisce l'equazione:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + k(x - y) + T = 0 \tag{1}$$

mentre l'equilibrio alla rotazione per il sistema pendolo-ruota dentata dà luogo all'equazione:

$$Tr - J\ddot{\vartheta} - ml^2\ddot{\vartheta} - mgl\sin\vartheta = 0 \tag{2}$$

Si osservi che, nell'equazione (1) si è indicato con y il movimento impresso all'estremo sinistro della molla tramite il manovellismo a croce; poiché la manovella $\mathrm{O_1A}$ ruota a velocità angolare Ω costante, risulta $y(t) = Y\sin\Omega t$. Dalla (2), ritenendo valida l'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio ($\sin\vartheta \cong \vartheta$), è possibile ricavare l'azione tangenziale T:

$$T = \frac{1}{r}[(J + ml^2)\ddot{\vartheta} + mgl\vartheta] \tag{3}$$

La relazione cinematica che lega la traslazione x della slitta con la rotazione ϑ della ruota dentata è la seguente:

$$\vartheta = \frac{x}{r} \tag{4}$$

dove r indica il raggio primitivo della ruota dentata.

A questo punto è immediato ricavare l'equazione di moto del sistema: basta infatti sostituire nella (1) il valore di T fornito dalla (3) e tenere conto della relazione (4); con semplici passaggi si ottiene:

$$\left[M + \frac{J}{r^2} + m\left(\frac{l}{r}\right)^2\right]\ddot{x} + c\dot{x} + \left(k + \frac{mgl}{r^2}\right)x = kY\sin\Omega t \tag{5}$$

Per semplicità di scrittura poniamo:

$$\begin{aligned} M_{eq} &= M + \frac{J}{r^2} + m\left(\frac{l}{r}\right)^2 = 4.563 \text{ kg} \\ c_{eq} &= c = 80 \text{ Ns/m} \\ k_{eq} &= k + \frac{mgl}{r^2} = 5036.8 \text{ N/m} \\ F_{eq} &= kY = 250 \text{ N} \end{aligned} \tag{6}$$

La (5) può quindi essere riscritta nella forma:

$$M_{eq}\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = F_{eq}\sin\Omega t \tag{7}$$

La pulsazione propria ω ed il fattore di smorzamento ξ valgono rispettivamente:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{M_{eq}}} = 33.2 \text{ rad/s} \qquad \xi = \frac{\mathrm{c_{eq}}}{2\mathrm{M_{eq}}\omega} = 0.264 \tag{8}$$

L'espressione analitica del moto a regime risulta:

$$x(t) = X\sin(\Omega t - \varphi) \tag{9}$$

dove l'ampiezza X e la fase φ si ricavano con le seguenti relazioni:

$$X = \frac{F_{eq}}{\sqrt{(k_{eq} - M_{eq}\Omega^2)^2 + (c_{eq}\Omega)^2}} = 0.0137 \text{ m} \tag{10}$$

$$\tan\varphi = \frac{c_{eq}\Omega}{k_{eq} - M_{eq}\Omega^2} = -0.323 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 2.829 \text{ rad} = 162^\circ \tag{11}$$

L'ampiezza a regime delle oscillazioni del pendolo risulta:

$$\Theta = \frac{X}{r} = 0.0687 \text{ rad} = 3.93^\circ \tag{12}$$

Esercizio 10 - Cod. VIB-050

Si deve installare in un laboratorio una macchina per prove di fatica cha ha tutte le masse in movimento equilibrate, tranne la massa in moto alterno, che si muove verticalmente con legge pressoché sinusoidale.

La macchina, rappresentata schematicamente in Figura 1, è costituita da un telaio di massa M_T sul quale è montato un meccanismo biella-manovella, di massa trascurabile, che aziona una testa oscillante di massa m; mediante un opportuno sistema di fissaggio, la testa oscillante è collegata al provino in modo tale da generare una sollecitazione di flessione alternata.

Utilizzando i dati assegnati ed i diagrammi di Figura 2 si chiede di progettare la fondazione (basamento di cemento sul quale viene installata la macchina) in modo che la forza alternata trasmessa al pavimento risulti inferiore al valore $F_{max} = 100$ N e che l'ampiezza delle vibrazioni della fondazione non superi il valore $X_{max} = 0.1$ mm.

Si chiede inoltre di verificare che, per ragioni pratiche, la massa totale M_{tot} (somma della massa della macchina e di quella della fondazione) non superi il limite di 10000 kg.

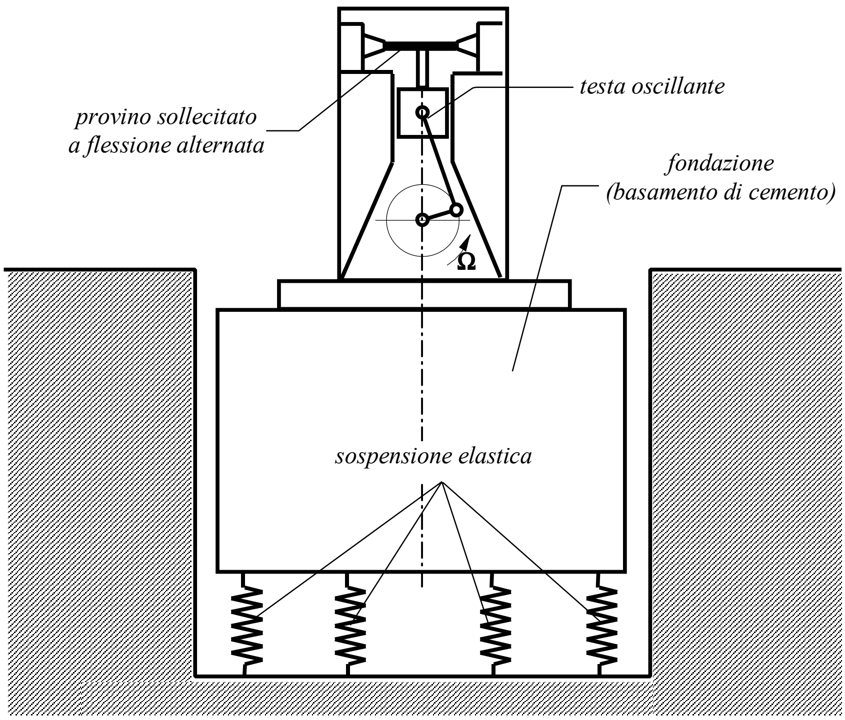


Figura 1

Dati

- Massa della testa oscillante . . . . $m = 200$ kg
- Massa complessiva della macchina . . . . $M = M_T + m = 1500$ kg
- Corsa della testa oscillante . . . . $c = 8$ mm
- Velocità di rotazione della manovella . . . . $n = 300$ giri/min

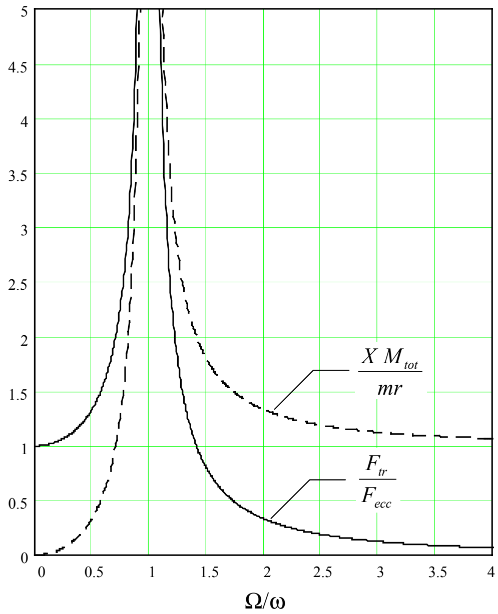


Figura 2

Nomenclatura

ω	Pulsazione propria
Ω	Pulsazione della forzante
$r = c/2$	Raggio di manovella
F_{ecc}	Forza eccitatrice
F_{tr}	Forza trasmessa
X	Ampiezza delle oscillazioni a regime

$$F_{ecc} = mr\Omega^2$$

$$\frac{F_{tr}}{F_{ecc}} = \frac{1}{|1-(\Omega/\omega)^2|}$$

$$\frac{XM_{tot}}{mr} = \frac{(\Omega/\omega)^2}{|1-(\Omega/\omega)^2|}$$

Soluzione

Il progetto della fondazione consiste nel determinare i parametri del sistema vibrante (massa e rigidezza) in modo tale da mantenere i valori della forza trasmessa al terreno e dell'ampiezza di oscillazione entro i limiti assegnati. Per risolvere il problema faremo riferimento allo schema di Figura 3, in cui sono rappresentate la macchina per prove di fatica e la relativa fondazione.

Indichiamo con $z(t)$ lo spostamento della testa oscillante relativo alla macchina e con $x(t)$ lo spostamento assoluto del gruppo macchina-fondazione; poiché la testa oscillante si muove con legge pressoché sinusoidale[2] possiamo scrivere:

$$z(t) \cong r \sin \Omega t = \frac{c}{2} \sin \Omega t \tag{1}$$

dove Ω indica la velocità angolare della manovella (coincidente con la pulsazione del moto armonico della testa oscillante) ed $r = c/2$ il raggio di manovella.

Poiché ad ogni oscillazione della massa m corrisponde una rotazione completa della manovella, si ha:

$$\Omega = \frac{2\pi n}{60} \tag{2}$$

Per le masse in gioco adottiamo i seguenti simboli:

- Massa della testa oscillante .... m
- Massa del telaio della macchina .... M_T

[2]Indicando rispettivamente con r ed l le lunghezze della manovella e della biella, si può ritenere che la testa oscillante si muova con legge pressoché sinusoidale se il parametro $\lambda = r/l$ (detto *rapporto caratteristico del manovellismo*) risulta molto minore dell'unità.

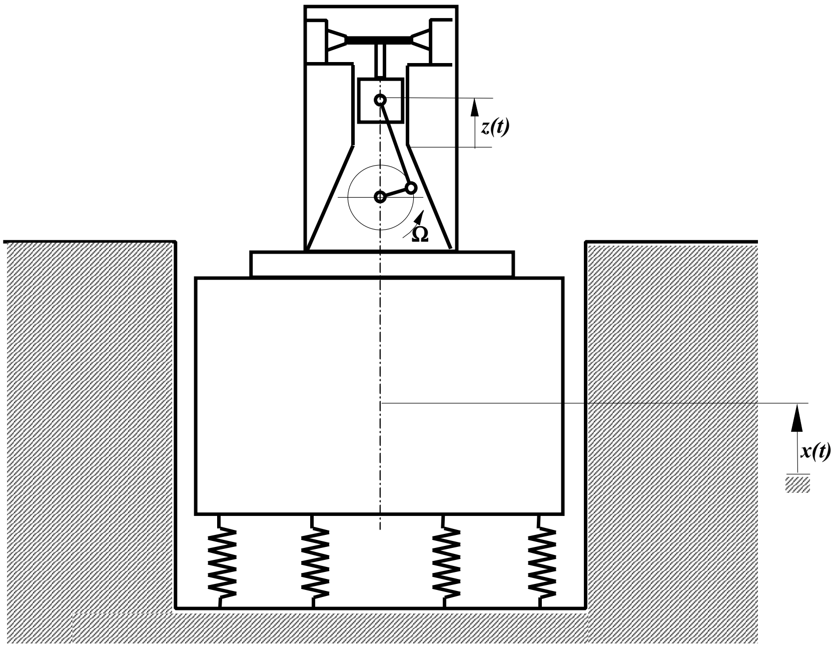


Figura 3

- Massa complessiva della macchina .... $M = M_T + m$
- Massa della fondazione .... M_F
- Massa totale .... $M_{tot} = M + M_F = M_T + m + M_F$

Le forze agenti sul sistema durante il movimento sono evidenziate in Figura 4.
Si noti che:

- la forza esercitata dalla sospensione elastica si ottiene moltiplicando la rigidezza equivalente k per lo spostamento verticale x del gruppo "macchina-fondazione"; poiché le molle sono in parallelo (ovvero sono soggette alla stessa deformazione) la rigidezza k è data dalla somma delle rigidezze delle singole molle;
- la forza d'inerzia agente sulla massa oscillante è data dal prodotto della massa m per la sua accelerazione assoluta (che si ottiene sommando l'accelerazione relativa $\ddot{z}$ con l'accelerazione di trascinamento $\ddot{x}$);
- in Figura 4 sono state omesse le forze peso, in quanto tali forze risultano in ogni istante equilibrate dalle forze elastiche che si generano a causa delle deformazioni statiche delle molle);
- lo spostamento x viene misurato a partire dalla posizione di equilibrio statico.

L'equazione di moto per il sistema in esame si ottiene scrivendo la condizione di equilibrio dinamico alla traslazione verticale:

$$(M_T + M_F)\ddot{x} + m(\ddot{x} + \ddot{z}) + kx = 0 \tag{3}$$

ovvero, raccogliendo $\ddot{x}$ e tenendo conto della definizione di massa totale M_{tot}:

$$M_{tot}\ddot{x} + kx = -m\ddot{z} \tag{4}$$

Derivando due volte rispetto al tempo la (1) e sostituendo nella (4) il valore di $\ddot{z}$ così determinato, si ricava, dopo semplici passaggi:

$$M_{tot}\ddot{x} + kx = mr\Omega^2 \sin \Omega t \tag{5}$$

Dalla (5), ponendo $\omega = \sqrt{k/M_{tot}}$ e dividendo tutti i termini per M_{tot} , si perviene all'equazione sotto riportata:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{m}{M_{tot}} r\Omega^2 \sin \Omega t \tag{6}$$

La (6) è un'equazione differenziale del 2° ordine che descrive il moto di un sistema vibrante ad un grado di libertà (non smorzato) eccitato da una forzante armonica; come è noto, la soluzione a regime (integrale particolare) di tale equazione è del tipo

$$x(t) = X \sin \Omega t \tag{7}$$

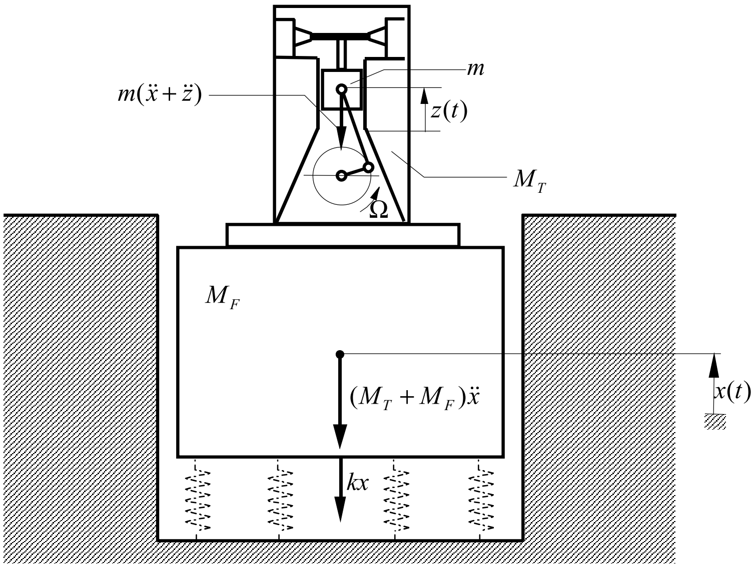


Figura 4

dove X (ampiezza delle oscillazioni a regime) si ricava sostituendo la (7) e la sua derivata seconda nella (6) e semplificando i termini armonici; con semplici passaggi si ottiene:

$$X = \frac{mr}{M_{tot}} \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \tag{8}$$

Dalla (8) si deduce che l'ampiezza X è positiva per $\Omega/\omega < 1$, è negativa per $\Omega/\omega > 1$ e tende all'infinito[3] per $\Omega/\omega = 1$; spesso l'ampiezza X viene considerata in valore assoluto e, per tenere conto del suo segno, si introduce uno sfasamento φ rispetto alla causa eccitatrice, rappresentata dal termine al secondo membro nella (6); in questo caso possiamo scrivere:

$$x(t) = X \sin(\Omega t - \varphi) \tag{9}$$

dove

$$X = \frac{mr}{M_{tot}} \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left|1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} \qquad \varphi = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad \Omega/\omega < 1 \\ \pi & \text{per} \quad \Omega/\omega > 1 \end{cases} \tag{10}$$

La funzione

$$\frac{X}{\mu r} = \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left|1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} \tag{11}$$

in cui si è posto $\mu = m/M_{tot}$ rappresenta l'ampiezza di oscillazione adimensionalizzata ed il suo grafico è riportato con linea tratteggiata in Figura 2; come risulta evidente, tale funzione dipende dal rapporto fra la pulsazione della causa eccitatrice e la pulsazione propria del sistema.

Per quanto riguarda la forza F_{tr} trasmessa al terreno, possiamo affermare che il suo valore risulta pari a quello della forza elastica (infatti, come risulta evidente dalla Figura 3, il collegamento tra il sistema vibrante ed il

[3]Nella realtà l'ampiezza delle oscillazioni non tende all'infinito in condizioni di risonanza ($\Omega/\omega = 1$), poiché intervengono i fenomeni di attrito a limitare l'ampiezza stessa delle vibrazioni (si veda a questo proposito la trattazione delle vibrazioni forzate in presenza di smorzamento).

terreno avviene esclusivamente tramite le molle); si ha pertanto:

$$F_{tr} = kX = k\frac{mr}{M_{tot}}\frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left|1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} = mr\omega^2\frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left|1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} = \frac{mr\Omega^2}{\left|1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} \tag{12}$$

Il termine $mr\Omega^2$ rappresenta il valore massimo della forza d'inerzia agente sulla testa oscillante per effetto del moto armonico $z(t)$; tale forza rappresenta la causa eccitatrice che genera le vibrazioni del sistema; dalla (12), ponendo $F_{ecc} = mr\Omega^2$, si ha:

$$\frac{F_{tr}}{F_{ecc}} = \frac{1}{\left|1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} \tag{13}$$

Il grafico della funzione (13) è riportato con linea continua in Figura 2 anche in questo caso si può osservare che il rapporto fra la forza trasmessa e la forza eccitatrice dipende dal rapporto fra la pulsazione della forzante e la pulsazione propria del sistema.
Osservando i due diagrammi si nota che, per $\Omega/\omega \ll 1$ si hanno elevati valori di forza trasmessa e piccoli valori dell'ampiezza di oscillazione: in questo caso la pulsazione propria del sistema è elevata rispetto alla pulsazione della forzante (fondazione rigida); viceversa, per $\Omega/\omega \gg 1$ la forza trasmessa è di bassa entità, mentre l'ampiezza di oscillazione risulta elevata: in questo caso la pulsazione propria del sistema è piccola rispetto alla pulsazione della forzante (fondazione sospesa).
In altri termini, la fondazione rigida è caratterizzata da elevati valori della costante elastica e da bassi valori della massa, mentre per la fondazione sospesa si hanno basse rigidezze e masse elevate. Le considerazioni sopra riportate sono riassunte schematicamente in Figura 5, nella quale sono riportati qualitativamente i diagrammi di Figura 2 e sono evidenziati gli intervalli del rapporto Ω/ω per i quali una fondazione può considerarsi rigida oppure sospesa.

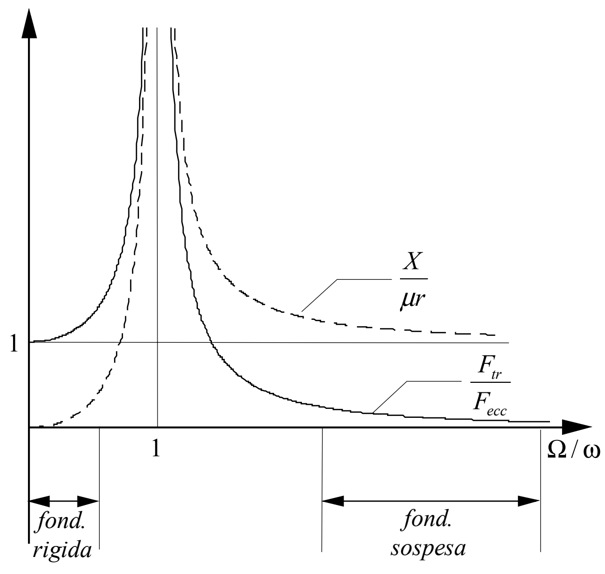


Figura 5

Giunti a questo punto possiamo effettuare il dimensionamento della fondazione utilizzando i dati ed i diagrammi assegnati.
Procediamo innanzitutto con il calcolo della pulsazione della forzante, facilmente calcolabile mediante la relazione (2):

$$\Omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \times \pi \times 300}{60} = 31.4 \text{ rad/s} \tag{14}$$

La forza eccitatrice risulta:

$$F_{ecc} = mr\Omega^2 = 200 \times 4 \times 10^{-3} \times 31.4^2 = 789 \text{ N} \tag{15}$$

Il rapporto tra forza trasmessa ammissibile e la forza eccitatrice vale pertanto:

$$\frac{F_{max}}{F_{ecc}} = \frac{100}{789} = 0.127 \tag{16}$$

Affinché non venga superato il limite imposto sulla forza trasmessa al pavimento, dovrà essere verificata la seguente disequazione:

$$\frac{F_{max}}{F_{ecc}} = \frac{1}{\left|1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} \leq 0.127 \tag{17}$$

Per quanto concerne l'ampiezza di oscillazione, possiamo procedere in modo analogo: dapprima si calcola il rapporto $X/\mu r$ e successivamente si impone la limitazione richiesta dal testo del problema. Assumendo per la massa totale un valore pari al 95% del valore massimo ammissibile si ha:

$$M_{tot} = 0.95 \times 10000 = 9500 \text{ kg} \tag{18}$$

$$\frac{X_{max}M_{tot}}{mr} = \frac{0.1 \times 10^{-3} \times 9500}{200 \times 4 \times 10^{-3}} = 1.188 \tag{19}$$

$$\frac{XM_{tot}}{mr} = \frac{\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left|1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} \leq 1.188 \tag{20}$$

Le disequazioni (17) e (20) possono essere agevolmente risolte per via grafica con l'ausilio dei diagrammi di Figura 2, disegnati separatamente in Figura 6 per motivi di chiarezza.
Dai grafici si ricava che la limitazione sulla forza trasmessa è soddisfatta per $\Omega/\omega > 3$, mentre la limitazione sull'ampiezza massima di oscillazione è soddisfatta per $\Omega/\omega < 0.7$ oppure per $\Omega/\omega > 2.5$; pertanto entrambe le condizioni risultano verificate se assumiamo $\Omega/\omega = 3.5$.

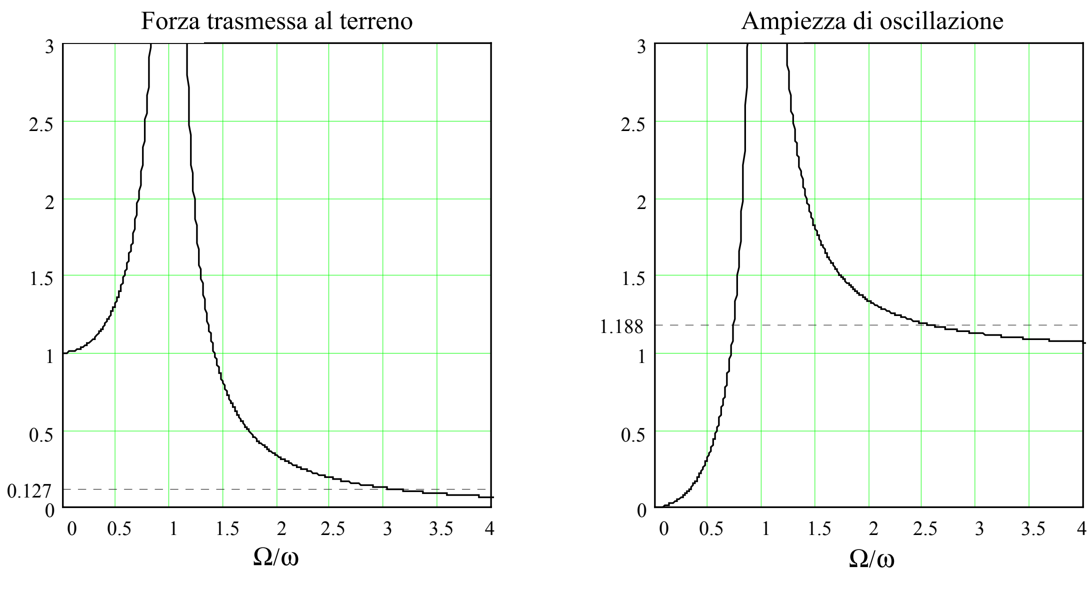


Figura 6

Conoscendo ora il rapporto Ω/ω possiamo calcolare immediatamente la rigidezza equivalente k da assegnare alla sospensione elastica; si ha:

$$k = M_{tot}\omega^2 \tag{21}$$

dove

$$\omega = \frac{\Omega}{3.5} = \frac{31.4}{3.5} = 8.97 \text{ rad/s} \tag{22}$$

Con i dati assegnati si ottiene $k = 765.4$ kN/m.
La massa della fondazione sulla quale dovrà essere montata la macchina si ottiene come differenza fra la massa totale e la massa propria della macchina:

$$M_F = M_{tot} - M = 9500 - 1500 = 8000 \text{ kg} \tag{23}$$

La forza trasmessa al terreno risulta:

$$F_{tr} = \frac{F_{ecc}}{\left|1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} = \frac{789}{1 - 3.5^2} = 70 \text{ N} \tag{24}$$

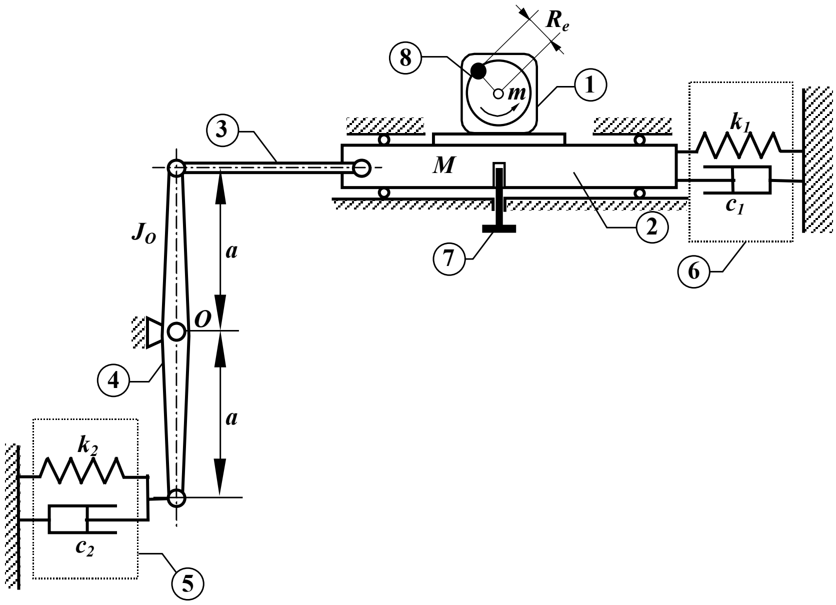
e l'ampiezza di oscillazione:

$$X = \frac{mr}{M_{tot}} \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left|1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} = \frac{200 \times 4 \times 10^{-3}}{9500} \times \frac{3.5^2}{1 - 3.5^2} = 9.2 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.092 \text{ mm} \tag{25}$$

Come si può notare, tutte le limitazioni richieste dal progetto risultano soddisfatte; infatti la forza trasmessa risulta minore di 100 N, l'ampiezza di oscillazione è inferiore a 0.1 mm e la massa totale non supera i 10000 kg.

Esercizi proposti

Esercizio 11 - Cod. VIB-052



Il sistema rappresentato in figura è costituito da un motore elettrico (1) montato sopra una slitta (2), scorrevole senza attrito all'interno di una guida rettilinea; l'asta (3), di massa trascurabile, collega la slitta alla leva (4), incernierata nel punto O; il sistema è vincolato a terra mediante i supporti elastici (5) e (6), schematizzati mediante una molla lineare in parallelo con uno smorzatore viscoso.
La slitta può essere bloccata mediante il chiavistello (7).
A causa di un errore di montaggio il rotore (8), calettato sull'asse del motore elettrico, presenta un'eccentricità pari ad R_e.
Il motore viene avviato e viene portato alla velocità di regime n, mantenendo il chiavistello nella posizione di bloccaggio, al fine di impedire qualsiasi movimento della slitta e degli organi ad essa collegati; una volta raggiunta la velocità di regime, il chiavistello viene sfilato: il sistema può allora vibrare sotto l'effetto della forzante causata dallo squilibrio del rotore.

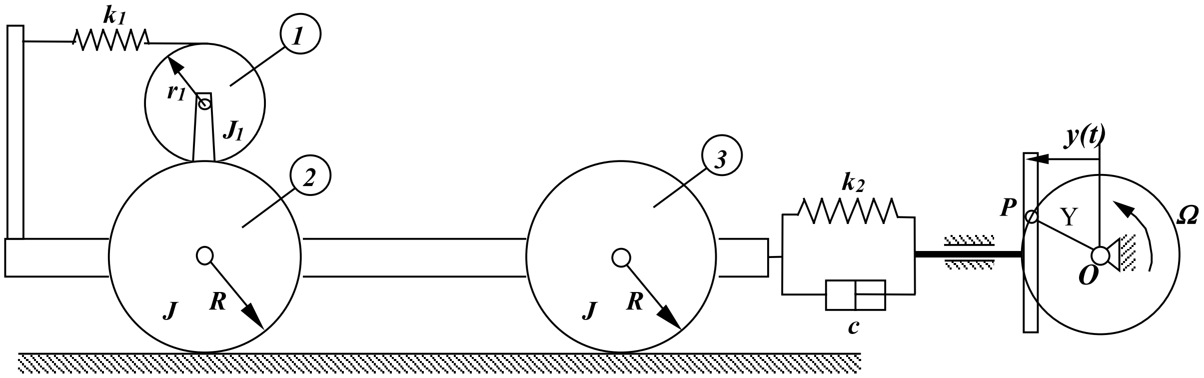
Domande

1. scrivere l'equazione di moto del sistema, supponendo che l'asta (4) compia piccole oscillazioni;
2. determinare la legge di moto della slitta (in transitorio e a regime);
3. calcolare il tempo approssimativamente necessario per raggiungere la condizione di regime;
4. determinare l'andamento temporale delle sollecitazioni nell'asta (in condizioni di regime);
5. nell'ipotesi che lo smorzamento dei supporti sia trascurabile e che la velocità di rotazione del motore coincida con la pulsazione propria del sistema (condizione di risonanza), si determini l'andamento temporale delle vibrazioni della slitta.

Dati

- Massa del sistema slitta-motore (escluso rotore) .... $M = 20$ kg
- Massa del rotore squilibrato .... $m = 5$ kg
- Momento d'inerzia della leva (4) rispetto al punto O .... $J_0 = 0.15\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Costanti elastiche dei supporti .... $k_1 = 10$ kN/m $k_2 = 15$ kN/m
- Costanti di smorzamento dei supporti .... $c_1 = 80$ Ns/m $c_2 = 100$ Ns/m
- Eccentricità del rotore .... $R_e = 5$ mm
- Lunghezza dei bracci della leva (4) .... $a = 300$ mm
- Velocità angolare del rotore .... $n = 1000$ giri/min

Esercizio 12 - Cod. VIB-059



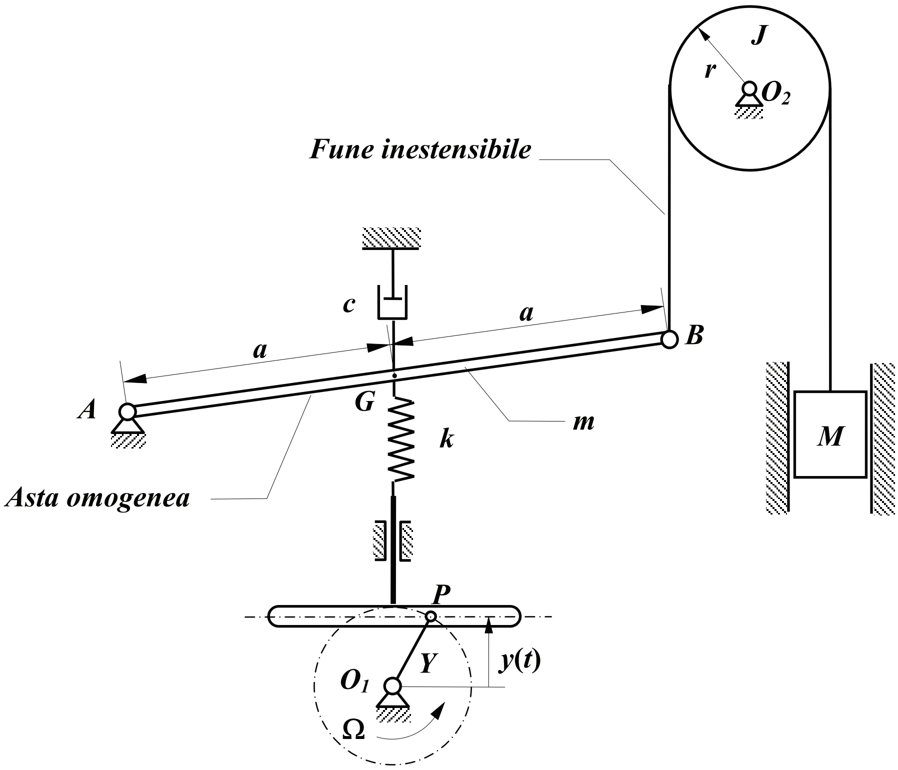
Il carrello rappresentato in figura viene azionato da un manovellismo a croce, la cui manovella OP ruota a velocità angolare Ω costante.
La trasmissione del moto fra il manovellismo ed il carrello avviene mediante una molla di rigidezza k_2 ed uno smorzatore avente costante di smorzamento pari a c.
Sul carrello è montata una ruota (1) di raggio r_1 che viene messa in movimento dalla ruota (2) del carrello; si supponga che la trasmissione del moto fra le ruote (1) e (2) avvenga senza slittamenti.
La ruota (1) è collegata al telaio del carrello da una molla di rigidezza k_1; si noti che l'estremità destra della molla si avvolge sulla circonferenza della ruota (1).
Nell'ipotesi che le ruote (2) e (3) rotolino senza strisciare sul terreno, si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto del sistema;
2. calcolare il valore della pulsazione propria ω e del fattore di smorzamento ξ;
3. determinare l'espressione analitica del moto a regime del carrello.

Dati

- Massa del carrello (comprensiva della massa di tutte le ruote) .... $M = 50$ kg
- Momento d'inerzia baricentrico della ruota (1) .... $J_1 = 0.04$ kg m^2
- Momento d'inerzia baricentrico delle ruote (2) e (3) .... $J = 0.2$ kgm^2
- Raggio della ruota (1) .... $r_1 = 0.15$ m
- Raggio delle ruote (2) e (3) .... $R = 0.25$ m
- Lunghezza della manovella OP .... $Y = 0.1$ m
- Rigidezza della prima molla .... $k_1 = 1000$ N/m
- Rigidezza della seconda molla .... $k_2 = 14000$ N/m
- Costante di smorzamento dello smorzatore viscoso .... $c = 600$ Ns/m
- Velocità angolare della manovella OP .... $\Omega = 15$ rad/s

Esercizio 13 - Cod. VIB-061



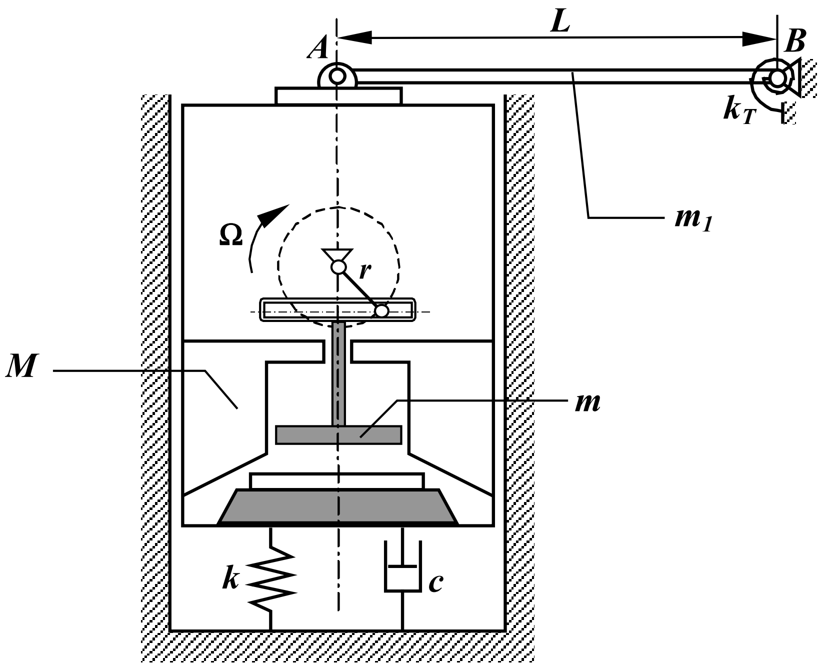
Il sistema ad un grado di libertà rappresentato in figura giace in un piano verticale e si trova in equilibrio quando la manovella O_1P e l'asta AB sono entrambe in posizione orizzontale.
Supponendo che l'asta possa compiere soltanto piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio, si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto del sistema;
2. calcolare la pulsazione propria ω ed il fattore di smorzamento ξ;
3. determinare l'ampiezza e la fase delle oscillazioni a regime della massa M quando la manovella O_1P ruota con velocità angolare costante Ω.

Dati

- Massa dell'asta AB .... $m = 5$ kg
- Massa traslante in direzione verticale .... $M = 15$ kg
- Momento d'inerzia della puleggia .... $J = 0.09$ kg m^2
- Raggio della puleggia .... $r = 0.1$ m
- Semi lunghezza dell'asta .... $a = 0.25$ m
- Lunghezza della manovella O_1P .... $Y = 0.05$ m
- Rigidezza della molla .... $k = 2000$ N/m
- Costante di smorzamento dello smorzatore viscoso .... $c = 60$ Ns/m
- Velocità angolare della manovella O_1P .... $\Omega = 10$ rad/s

Esercizio 14 - Cod. VIB-074



In figura è rappresentata schematicamente una pressa per operazioni di stampaggio.
Come risulta evidente dal disegno, il meccanismo che muove la massa m è un manovellismo a croce azionato da una manovella di raggio r che ruota a velocità angolare costante Ω.
La massa della macchina (esclusa la massa azionata dal manovellismo) è pari ad M.
Nella parte superiore la macchina è vincolata, tramite una cerniera A, ad un'asta omogenea di lunghezza L e massa m_1, collegata a terra tramite un supporto elastico B di rigidezza torsionale k_T.
Nella parte inferiore la macchina è vincolata al suolo mediante un supporto elastico schematizzato mediante una molla di rigidezza k ed uno smorzatore viscoso di costante c.

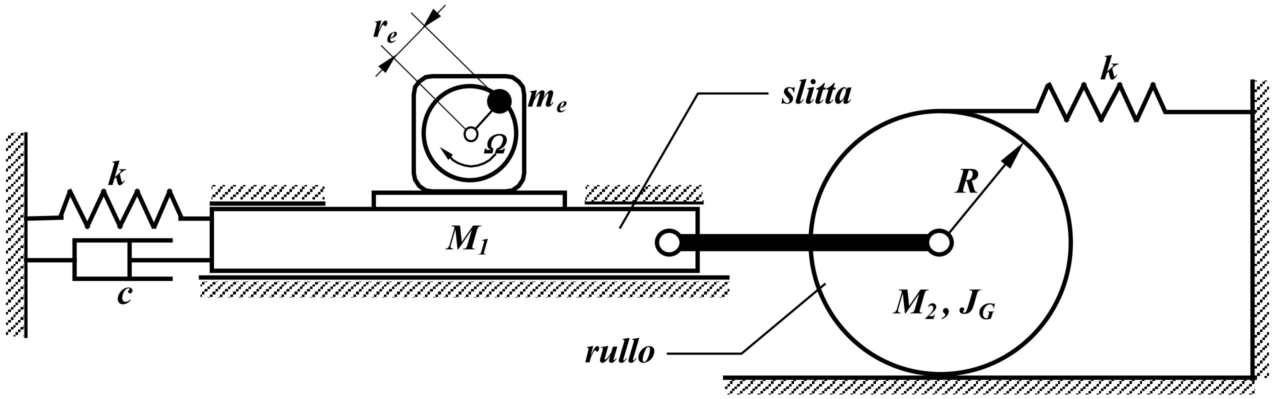
Domande

1. Scrivere l'equazione di moto del sistema, supponendo che l'asta AB compia piccole oscillazioni nell'intorno della posizione orizzontale.
2. Determinare la costante di smorzamento c in modo che l'ampiezza di vibrazione a regime della macchina risulti ≤ 5 mm quando il sistema opera in condizioni di risonanza.

Dati

- Massa della macchina .... $M = 1500$ kg
- Massa traslante .... $m = 100$ kg
- Massa dell'asta AB .... $m_1 = 48$ kg
- Lunghezza dell'asta AB .... $L = 1.5$ m
- Rigidezza torsionale del supporto B .... $k_T = 80$ kNm/rad
- Rigidezza del supporto inferiore .... $k = 180$ kN/m
- Raggio di manovella .... $r = 200$ mm

Esercizio 15 - Cod. VIB-076



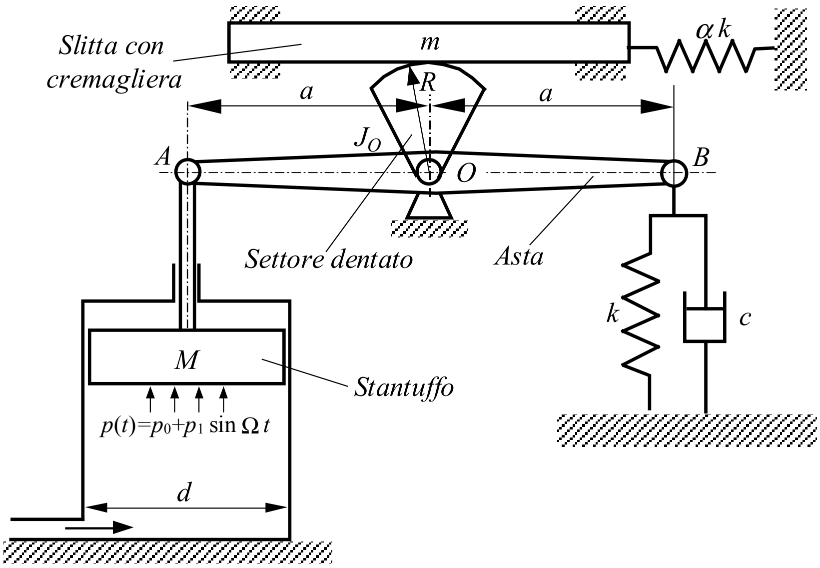
Per il sistema vibrante rappresentato in figura si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto del sistema, nell'ipotesi che il rullo rotoli senza strisciare sul terreno e che la slitta scorra senza attrito sui supporti;
2. calcolare la frequenza propria ed il fattore di smorzamento;
3. determinare ampiezza e fase delle oscillazioni della slitta in condizioni di regime, supponendo costante la velocità angolare del rotore eccentrico;
4. determinare il minimo valore del coefficiente di aderenza μ, che garantisce assenza di slittamento del rullo, quando il sistema vibra in condizioni di regime.

Dati

- Massa del gruppo slitta-motore .... $M_1 = 20$ kg
- Massa del rotore eccentrico .... $m_e = 7$ kg
- Massa del rullo .... $M_2 = 10$ kg
- Momento d'inerzia baricentrico del rullo .... $J_G = 0.08\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Eccentricità del rotore .... $r_e = 6$ mm
- Raggio del rullo .... $R = 150$ mm
- Rigidezza della molla .... $k = 1000$ N/m
- Costante di smorzamento .... $c = 90$ Ns/m
- Velocità angolare del rotore .... $\Omega = 13$ rad/s

Esercizio 16 - Cod. VIB-078



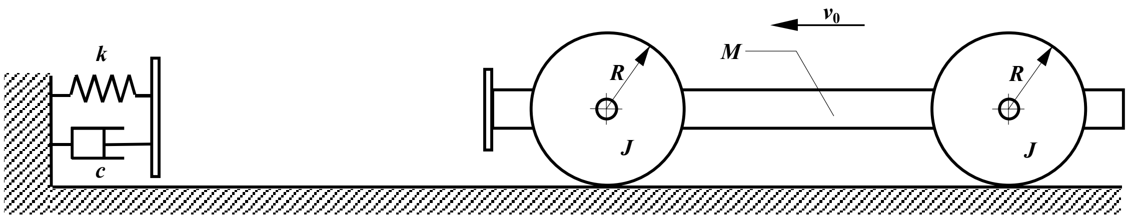
Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura.
Nella posizione di equilibrio l'asta AB è orizzontale, le molle sono scariche ed il peso dello stantuffo è completamente equilibrato dalla pressione p_0 del gas contenuto nel recipiente.
Si supponga che la pressione subisca una variazione temporale attorno al valore medio p_0, con legge sinusoidale di ampiezza p_1 e pulsazione Ω.
Supponendo trascurabili tutti gli attriti e ritenendo valida l'ipotesi di piccole oscillazioni dell'asta AB nell'intorno della posizione orizzontale, si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto del sistema;
2. determinare il valore della costante α in modo che la frequenza propria del sistema sia tripla rispetto a quella della causa eccitatrice;
3. calcolare il fattore di smorzamento e dire se il sistema risulta sottosmorzato, sovrasmorzato o in condizioni di smorzamento critico;
4. calcolare la legge di moto della slitta in condizioni di regime;
5. nell'ipotesi di smorzamento trascurabile, dire per quali valori di frequenza della forzante l'accelerazione massima della slitta risulta inferiore a 5 m/s^2.

Dati

- Massa dello stantuffo .... $M = 15$ kg
- Mom. d'inerzia dell'asta AB rispetto ad O (compreso il settore dentato) .... $J_O = 0.04$ kg m^2
- Massa della slitta .... $m = 6$ kg
- Rigidezza della molla verticale .... $k = 2000$ N/m
- Costante di smorzamento .... $c = 20$ Ns/m
- Lunghezza dei bracci dell'asta AB .... $a = 120$ mm
- Raggio primitivo del settore dentato .... $R = 80$ mm
- Ampiezza della variazione di pressione .... $p_1 = 6000$ Pa
- Pulsazione della variazione di pressione .... $\Omega = 6$ rad/s
- Diametro dello stantuffo .... $d = 100$ mm

Esercizio 17 - Cod. VIB-086



Un carrello scorrevole su rotaia urta con velocità v_0 contro un respingente al quale rimane agganciato.
Si schematizzi il respingente mediante una molla ed uno smorzatore viscoso (entrambi di massa trascurabile rispetto alla massa del carrello).
Supponendo che non vi sia strisciamento fra la rotaia e le ruote, si chiede di determinare:

- la pulsazione propria ed il fattore di smorzamento del sistema;
- la legge di moto del carrello, l'ampiezza massima di vibrazione e l'istante di tempo in cui tale massimo viene raggiunto;
- l'andamento temporale della forza trasmessa dal respingente al carrello, il massimo valore di tale forza e l'istante di tempo in cui il massimo viene raggiunto;
- il tempo necessario per dissipare i 3/4 dell'energia posseduta dal carrello all'istante iniziale (si calcoli tale tempo a partire dall'istante in cui avviene l'urto fra respingente e carrello).

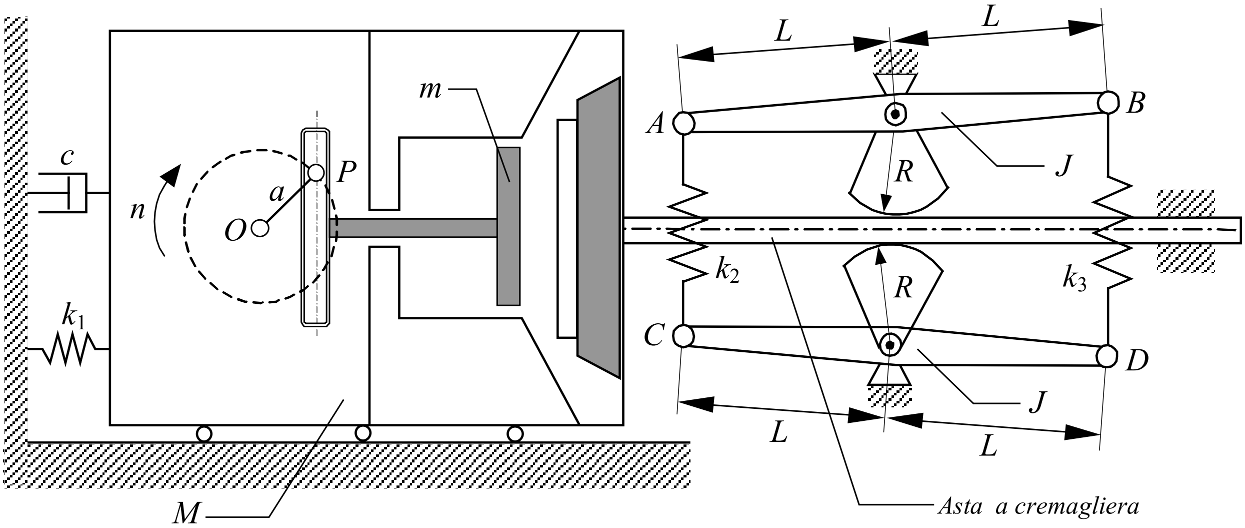
Se il carrello non rimanesse agganciato al respingente, calcolare l'istante di tempo in cui avviene il distacco e la velocità del carrello in tale istante.

Nota. Si ritenga trascurabile l'attrito volvente fra le ruote e la rotaia.

Dati

- Massa del carrello (ruote comprese) .... $M = 1200$ kg
- Momento d'inerzia di ogni ruota .... $J = 2\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Raggio delle ruote .... $R = 200$ mm
- Costante elastica del respingente .... $k = 120$ kN/m
- Costante di smorzamento del respingente .... $c = 6700$ Ns/m
- Velocità del carrello all'istante iniziale .... $v_0 = 18$ km/h

Esercizio 18 - Cod. VIB-088



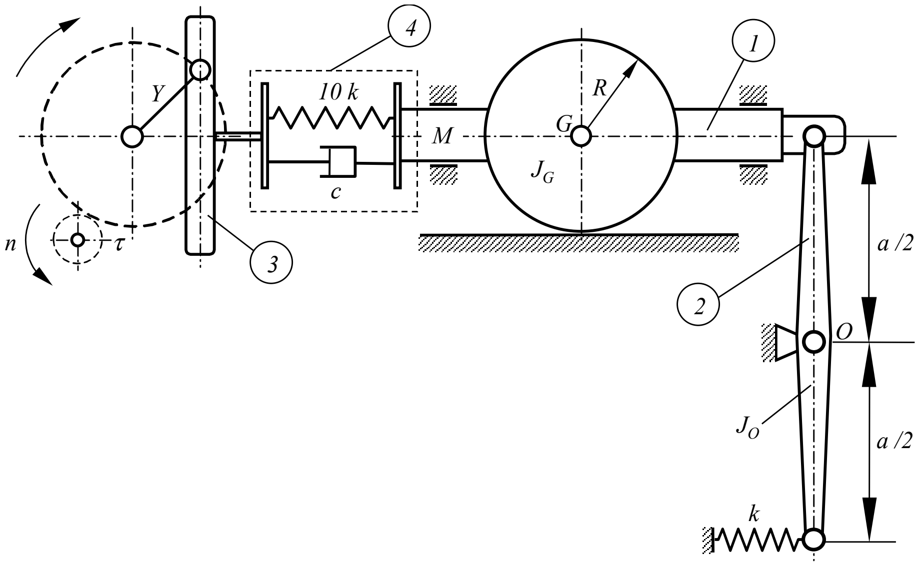
Una macchina di massa M, che può compiere oscillazioni in direzione orizzontale, è fissata a terra mediante un supporto deformabile, schematizzato mediante una molla di rigidezza k_1 ed uno smorzatore viscoso di costante pari a c.
Grazie alla presenza di corpi volventi, interposti fra la macchina ed il piano orizzontale, si possono ritenere trascurabili i fenomeni di attrito.
All'interno della macchina è presente un manovellismo a croce che aziona un pistone di massa m; il manovellismo è azionato da un motore elettrico ruotante a velocità costante.
Un'asta a cremagliera, solidale alla macchina, muove due settori dentati, aventi massa trascurabile e raggio primitivo R, sui quali sono montate due aste AB e CD di lunghezza $2L$.
Le estremità delle aste sono collegate a due molle di rigidezza k_2 e k_3, disposte come in figura; le molle risultano scariche quando le due aste si trovano in posizione orizzontale. Supponendo che le oscillazioni del sistema siano di ampiezza limitata (cosicché le aste AB e CD compiano piccole rotazioni attorno alla posizione orizzontale) si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto del sistema;
2. calcolare la pulsazione propria, il fattore di smorzamento e la pulsazione propria smorzata;
3. calcolare l'ampiezza e la fase delle oscillazioni a regime supponendo che la manovella OP ruoti a velocità angolare costante.

Dati

- Massa della macchina .... $M = 200$ kg
- Massa in moto alternativo .... $m = 20$ kg
- Momento d'inerzia delle aste AB e CD attorno all'asse di rotazione .... $J = 0.5\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Rigidezze delle molle .... $k_1 = 10000$ N/m $\quad k_2 = 5000$ N/m $\quad k_3 = 2500$ N/m
- Costante di smorzamento .... $c = 4000$ Ns/m
- Semi lunghezza delle aste AB e CD .... $L = 300$ mm
- Raggio dei settori dentati .... $R = 100$ mm
- Lunghezza della manovella OP .... $a = 60$ mm
- Velocità angolare della manovella .... $n = 250$ giri/min

Esercizio 19 - Cod. VIB-099



Il sistema in figura è costituito da un carrello (1), traslante in direzione orizzontale e collegato al bilanciere (2) tramite la cerniera O. L'estremo inferiore del bilanciere è vincolato al telaio tramite una molla di costante elastica k. Il carrello riceve il movimento da un manovellismo a croce (3), attraverso un elemento deformabile (4), schematizzato mediante una molla di rigidezza $10k$ in parallelo ad uno smorzatore viscoso di costante c. La manovella viene azionata a velocità angolare costante da un motore elettrico attraverso un riduttore di velocità avente rapporto di trasmissione τ.
Nell'ipotesi che:

- tutti gli attriti siano trascurabili;
- la ruota del carrello rotoli senza strisciare sul piano sottostante;
- il bilanciere compia piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio (verticale);

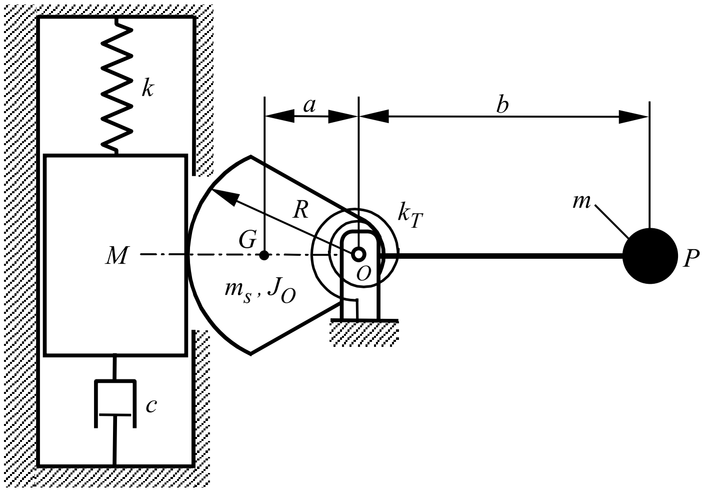
si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto del sistema;
2. calcolare la pulsazione propria ed il fattore di smorzamento;
3. determinare ampiezza e fase delle vibrazioni del sistema in condizioni di regime.

Dati

- Massa del carrello .... $M = 20$ kg
- Momento d'inerzia baricentrico della ruota del carrello .... $J_G = 0.15$ kg m^2
- Momento d'inerzia del bilanciere attorno al perno .... $J_O = 0.08$ kg m^2
- Lunghezza del bilanciere .... $a = 360$ mm
- Raggio della ruota del carrello .... $R = 150$ mm
- Rigidezza della molla .... $k = 2500$ N/m
- Costante di smorzamento .... $c = 700$ Ns/m
- Lunghezza della manovella .... $Y = 60$ mm
- Velocità angolare del motore .... $n = 5000$ giri/min
- Rapporto di trasmissione .... $\tau = 1/4$

Esercizio 20 - Cod. VIB-100



Si studino le vibrazioni libere del sistema in figura (posto in un piano verticale), conseguenti ad uno spostamento x_0 (verso il basso) della massa M rispetto alla posizione di equilibrio statico.
Si risolva l'esercizio nell'ipotesi che:

- il sistema sia in quiete all'istante $t = 0$;
- l'asta OP (di massa trascurabile) compia piccole oscillazioni attorno alla posizione orizzontale di equilibrio.
- la trasmissione del moto fra il settore e la massa traslante sia affidata ad una dentatura (non rappresentata in figura).

Dopo aver ricavato l'espressione analitica della legge di moto del sistema, se ne dia una rappresentazione grafica a livello qualitativo.

Nota. Si tenga presente che nella posizione di equilibrio, la molla torsionale è scarica, mentre la molla collegata alla massa M esercita una forza tale da mantenere in equilibrio il sistema con l'asta OP orizzontale.

Dati

- Massa traslante verticalmente .... $M = 10$ kg
- Massa posta all'estremità dell'asta .... $m = 2$ kg
- Massa del settore dentato .... $m_s = 3$ kg
- Momento d'inerzia del settore dentato attorno al punto O .... $J_O = 0.08$ kg m^2
- Distanza del baricentro G del settore dal punto O .... $a = 120$ mm
- Distanza della massa m dal punto O .... $b = 400$ mm
- Raggio primitivo del settore dentato .... $R = 250$ mm
- Rigidezza della molla collegata alla massa M .... $k = 2500$ N/m
- Rigidezza della molla torsionale .... $k_T = 30$ Nm/rad
- Costante di smorzamento .... $c = 120$ Ns/m
- Spostamento iniziale .... $x_0 = 15$ mm

Esercizio 21 - Cod. VIB-103

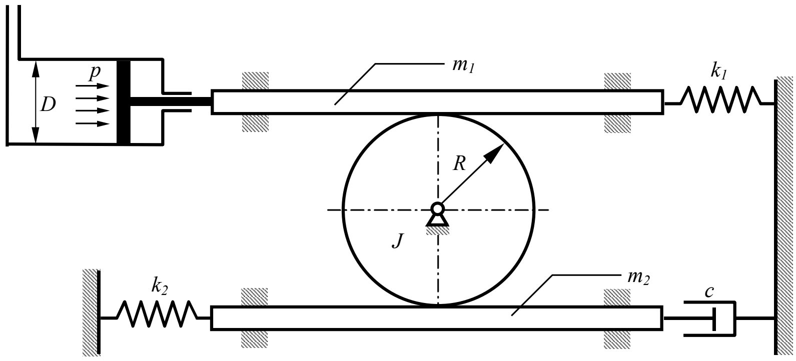


Figura 1

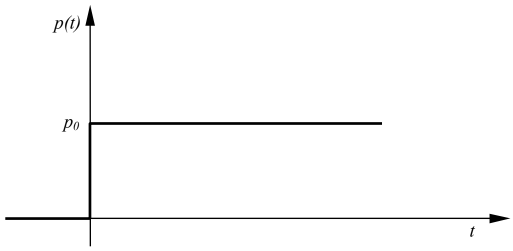


Figura 2

Il sistema rappresentato in Figura 1 è costituito dai seguenti elementi:

- due slitte dotate di cremagliera, scorrevoli senza attrito all'interno di guide rettilinee;
- una ruota dentata di raggio primitivo R;
- una cilindro idraulico di diametro D;
- due molle collegate alle slitte come in figura;
- uno smorzatore collegato alla slitta inferiore.

Per semplicità di rappresentazione non sono state rappresentate le dentature delle cremagliere e della ruota.

Domande

1. ricavare l'equazione di moto del sistema;
2. calcolare la pulsazione propria ω;
3. calcolare il fattore di smorzamento ξ e dire se il sistema risulta sottosmorzato, sovrasmorzato o in condizioni di smorzamento critico;
4. nell'ipotesi che all'istante iniziale il sistema sia fermo nella posizione di equilibrio, determinare l'andamento delle vibrazioni del sistema quando la pressione nel cilindro idraulico subisce una variazione a gradino (come indicato in Figura 2).

Dati

- Masse delle slitte .... $m_1 = 5$ kg $m_2 = 8$ kg
- Momento d'inerzia della ruota dentata .... $J = 0.05$ kg m^2
- Raggio primitivo della ruota dentata .... $R = 120$ mm
- Rigidezza delle molle .... $k_1 = 1500$ N/m $k_2 = 3000$ N/m
- Costante di smorzamento .... $c = 100$ Ns/m
- Pressione nel cilindro idraulico .... $p_0 = 70$ kPa
- Diametro del cilindro idraulico .... $D = 80$ mm

Esercizio 22 - Cod. VIB-105

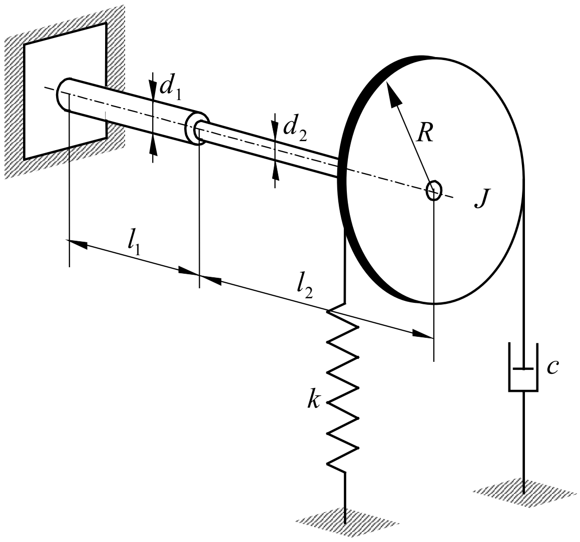


Figura 1

In Figura 1 è rappresentata una barra di torsione di acciaio sulla quale è fissato un disco di raggio R e momento d'inerzia J in corrispondenza dell'estremità libera.
I due tratti della barra hanno diametri e lunghezze differenti.
Al disco sono applicati una molla di rigidezza k ed uno smorzatore viscoso di costante pari a c.

Domande

1. calcolare la rigidezza torsionale della barra;
2. scrivere l'equazione di moto del disco;
3. calcolare la pulsazione propria del sistema;
4. determinare il valore della costante di smorzamento in modo tale che il sistema si trovi in condizioni di smorzamento critico;
5. utilizzando il valore di c precedentemente calcolato, determinare la legge di moto del disco quando vengono assegnate le condizioni iniziali sotto indicate.

Dati

- Momento d'inerzia del disco .... $J = 0.1\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Rigidezza della molla .... $k = 9000\ \mathrm{N/m}$
- Raggio del disco .... $R = 150\ \mathrm{mm}$
- Diametri dei due tratti della barra di torsione .... $d_1 = 15\ \mathrm{mm}$ $d_2 = 10\ \mathrm{mm}$
- Lunghezza dei due tratti della barra .... $l_1 = 200\ \mathrm{mm}$ $l_2 = 300\ \mathrm{mm}$
- Modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio .... $G = 80\ \mathrm{kN/mm^2}$
- Condizioni iniziali (φ indica la rotazione del disco) .... $\varphi(0) = 60°$ $\dot{\varphi}(0) = 0$

Esercizio 23 - Cod. VIB-107

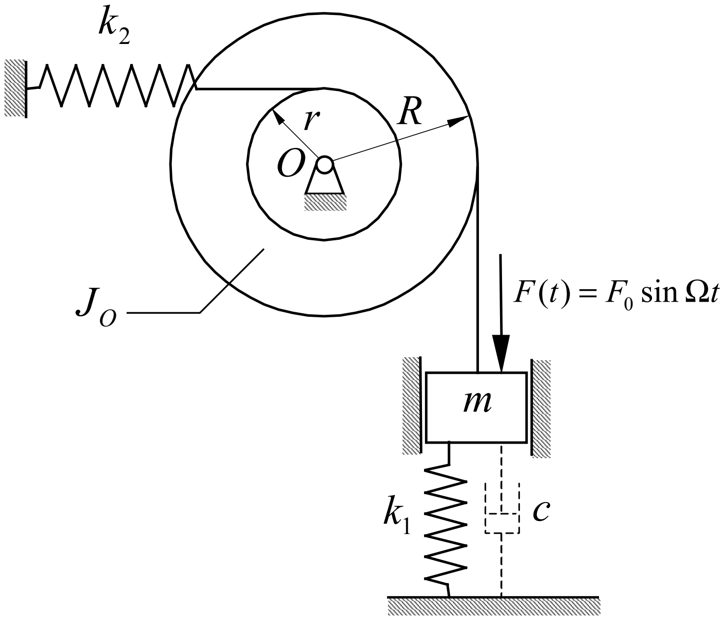


Figura 1

Il sistema in Figura 1 è costituito dai seguenti elementi:

- due pulegge coassiali di raggio r ed R con perno del punto O;
- una massa m traslante in direzione verticale lungo una guida priva di attrito;
- due molle di rigidezza k_1 e k_2 disposte come in figura;
- una fune inestensibile che si avvolge sulla puleggia di raggio maggiore, collegata alla massa traslante.

Il sistema è soggetto all'azione di una forza esterna, applicata alla massa m e variabile nel tempo con legge sinusoidale; il valore di picco e la pulsazione della forzante sono assegnati.

Domande

- Scrivere l'equazione di moto del sistema e calcolarne la pulsazione propria.
- Determinare la legge di moto della massa m in condizioni di regime, nell'ipotesi che non vi siano fenomeni di smorzamento;
- Supponendo di applicare alla massa m uno smorzatore viscoso (vedi figura), calcolare il valore della costante di smorzamento c per il quale l'ampiezza di vibrazione della massa traslante risulta dimezzata rispetto al caso non smorzato.

Dati

- Massa traslante .... $m = 10$ kg
- Momento d'inerzia totale delle due pulegge coassiali .... $J_O = 0.5$ kg m^2
- Rigidezza delle molle .... $k_1 = 1000$ N/m $k_2 = 2500$ N/m
- Raggi delle pulegge .... $r = 120$ mm $R = 240$ mm
- Valore di picco della forzante .... $F_0 = 80$ N
- Pulsazione della forzante .... $\Omega = 6$ rad/s

Esercizio 24 - Cod. VIB-109

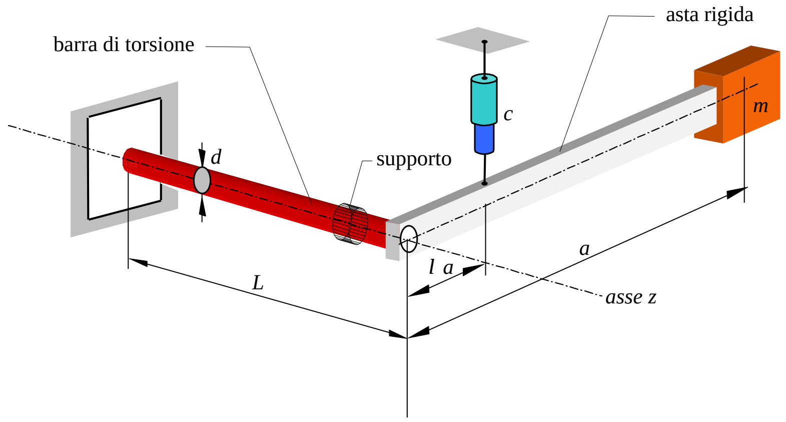


Figura 1

In Figura 1 è rappresentato un sistema vibrante costituito dai seguenti elementi:

- un'asta rigida di lunghezza a e massa trascurabile;
- una barra di torsione di acciaio di lunghezza L e diametro d, fissata al telaio ad un estremo e collegata all'asta come in figura;
- una massa m, collocata all'estremità dell'asta;
- uno smorzatore viscoso di costante pari a c, collegato all'asta ad una distanza λa ($\lambda < 1$) dall'asse z.

L'asta è in grado di compiere piccole rotazioni attorno all'asse z, grazie alla deformabilità torsionale della barra. Il supporto indicato in figura è fissato al telaio ed impedisce l'inflessione della barra.
Utilizzando i dati assegnati si chiede di:

1. calcolare la rigidezza torsionale della barra;
2. scrivere l'equazione di moto dell'asta e calcolare la frequenza propria delle piccole oscillazioni;
3. determinare il valore di λ per il quale il sistema ha un fattore di smorzamento $\xi = 0.1$;
4. supponendo che all'istante iniziale l'asta sia ruotata di $5°$ rispetto all'orizzontale ed abbia velocità nulla, determinare la legge di moto dell'asta e tracciarne un grafico qualitativo.

Dati

- Massa fissata all'estremità dell'asta .... $m = 20$ kg
- Lunghezza dell'asta .... $a = 180$ mm
- Lunghezza della barra di torsione .... $L = 120$ mm
- Diametro della barra di torsione .... $d = 15$ mm
- Costante di smorzamento .... $c = 1000$ Ns/m
- Modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio .... $G = 80000$ MPa

Esercizio 25 - Cod. VIB-110

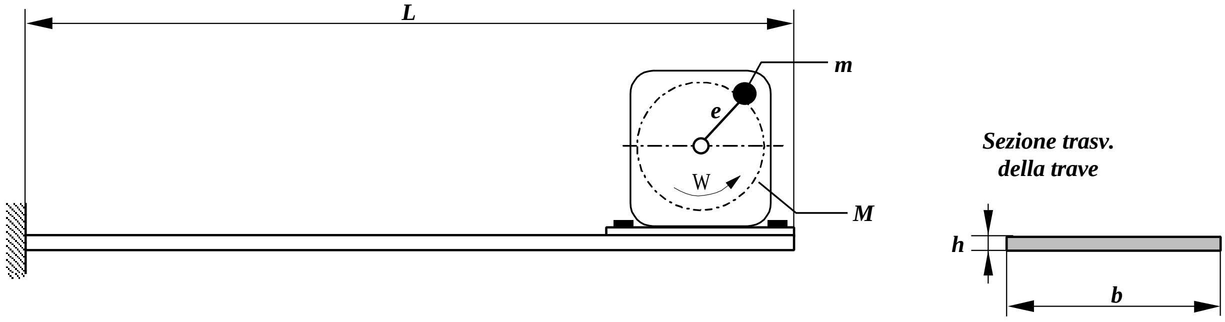


Figura 1

Si consideri il sistema in Figura 1, costituito da una trave a mensola in acciaio sulla quale è montato un motore elettrico in corrispondenza dell'estremità.
Sul motore, di massa M, è calettato un rotore di massa m che presenta un'eccentricità e.
Dopo aver calcolato la rigidezza equivalente della mensola, si studi il comportamento vibratorio del motore nella direzione verticale scrivendone l'equazione di moto (si ipotizzi smorzamento trascurabile).
Si determini poi la pulsazione propria del sistema e si individuino, per via grafica o analitica, gli intervalli di velocità del motore per cui l'ampiezza di vibrazione a regime risulti inferiore a 2 mm.

Nota. Si supponga trascurabile la massa della mensola.

Dati

- Massa del motore (escluso il rotore) .... $M = 45$ kg
- Massa del rotore eccentrico .... $m = 1$ kg
- Eccentricità del rotore .... $e = 15$ mm
- Lunghezza della mensola .... $L = 300$ mm
- Dimensioni della sezione trasversale della mensola .... $b = 100$ mm $h = 15$ mm
- Modulo di Young dell'acciaio .... $E = 206000$ MPa

Esercizio 26 - Cod. VIB-112

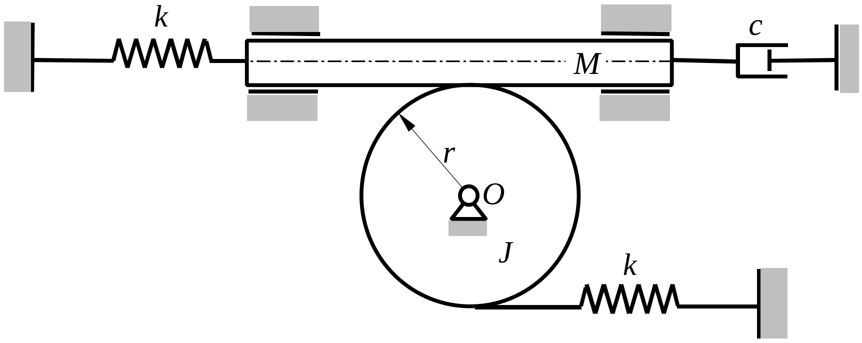


Figura 1

Il sistema rappresentato in Figura 1 è costituito dai seguenti elementi:

- un disco di raggio r e momento d'inerzia baricentrico J, ruotante attorno al punto O;
- una slitta di massa M, scorrevole in una guida orizzontale, che trasmette il movimento al disco per attrito.
- due molle di rigidezza k disposte come in figura;
- uno smorzatore viscoso con costante di smorzamento pari a c, collegato alla slitta.

Si ipotizzi assenza di strisciamento fra il disco e la slitta.

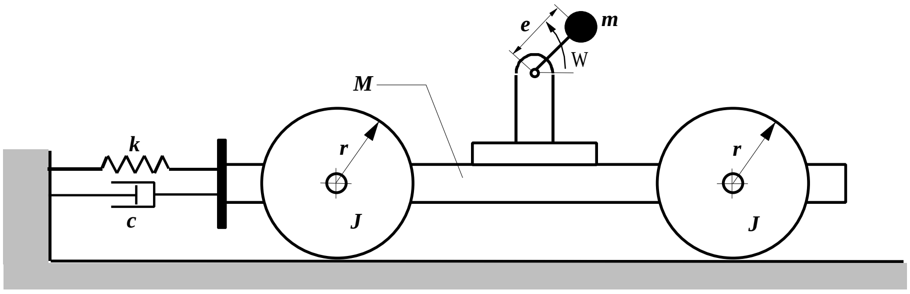
Domande

1. Scrivere l'equazione differenziale di moto del sistema.
2. Determinare la costante di smorzamento c in modo che il sistema sia in condizioni di smorzamento critico.
3. Studiare il movimento del sistema quando la slitta viene spostata di 80 mm dalla sua posizione di equilibrio statico (si ipotizzi il sistema in quiete all'istante $t = 0$).
4. Rappresentare in funzione del tempo la soluzione dell'equazione di moto, tracciandone un grafico qualitativo.

Dati

- Massa della slitta .... $M = 2$ kg
- Momento d'inerzia del disco .... $J = 0.04$ kg m^2
- Raggio del disco .... $r = 0.25$ m
- Rigidezza delle molle .... $k = 2000$ N/m

Esercizio 27 - Cod. VIB-113



Il sistema rappresentato in figura è costituito da un carrello di massa M, dotato di quattro ruote aventi raggio r e momento d'inerzia baricentrico pari a J.
Sul carrello è montata una massa m avente eccentricità e rispetto al perno di rotazione e ruotante con velocità angolare costante Ω.
Il carrello è collegato a terra tramite una molla di rigidezza k ed uno smorzatore viscoso di costante pari a c.

Domande

1. Scrivere l'equazione di moto del carrello.
2. Calcolare la pulsazione propria ed il fattore di smorzamento.
3. Studiare le vibrazioni forzate in condizioni di regime.

Nota. Si supponga che non vi sia strisciamento fra le ruote ed il terreno.

Dati

- Massa del carrello (ruote comprese) .... $M = 15$ kg
- Momento d'inerzia delle ruote .... $J = 0.05\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Massa eccentrica .... $m = 2$ kg
- Rigidezza della molla .... $k = 3000$ N/m
- Costante di smorzamento .... $c = 80$ Ns/m
- Eccentricità .... $e = 30$ mm
- Raggio delle ruote .... $r = 160$ mm
- Velocità angolare della massa eccentrica .... $\Omega = 10$ rad/s

Esercizio 28 - Cod. VIB-114

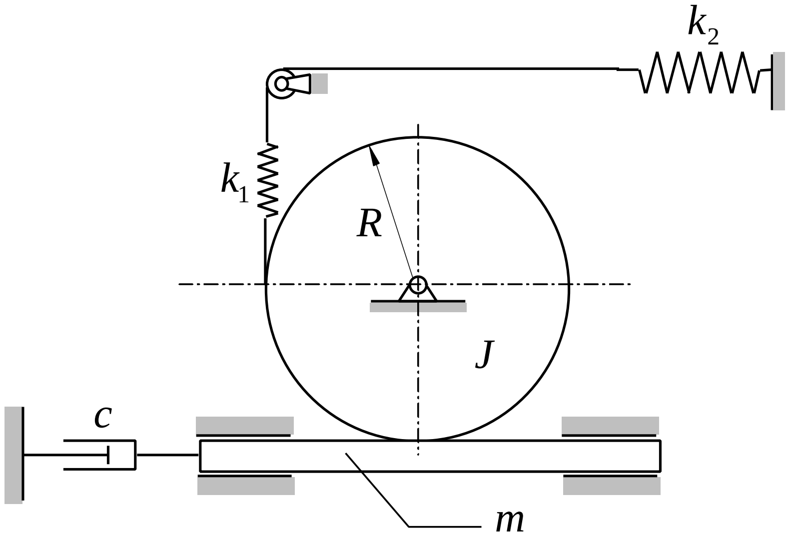


Figura 1

Si studi il sistema vibrante rappresentato in Figura 1, ritenendo valide le seguenti ipotesi:

- puleggia di rinvio con inerzia trascurabile;
- attrito trascurabile nei supporti che sostengono la slitta di massa m;
- assenza di slittamento fra il disco di raggio R e la slitta.

Domande

1. Calcolare la rigidezza equivalente delle due molle.
2. Scrivere l'equazione di moto del sistema.
3. Calcolare la pulsazione propria nell'ipotesi di smorzamento nullo.
4. Determinare la costante c dello smorzatore viscoso in modo che, dopo 5 cicli, l'ampiezza di vibrazione risulti il 10% di quella iniziale.
5. Studiare le vibrazioni libere smorzate del sistema derivanti dalle condizioni iniziali assegnate.
6. Tracciare un grafico qualitativo che rappresenti l'andamento delle vibrazioni nel tempo.

Dati

- Massa della slitta .... $m = 10$ kg
- Momento d'inerzia del disco .... $J = 0.045$ kg m^2
- Rigidezza delle molle .... $k_1 = 3000$ N/m $k_2 = 4000$ N/m
- Raggio del disco .... $R = 100$ mm
- Spostamento iniziale della slitta .... $x_0 = 6$ cm
- Velocità iniziale della slitta .... $\dot{x}_0 = 0$

Esercizio 29 - Cod. VIB-117

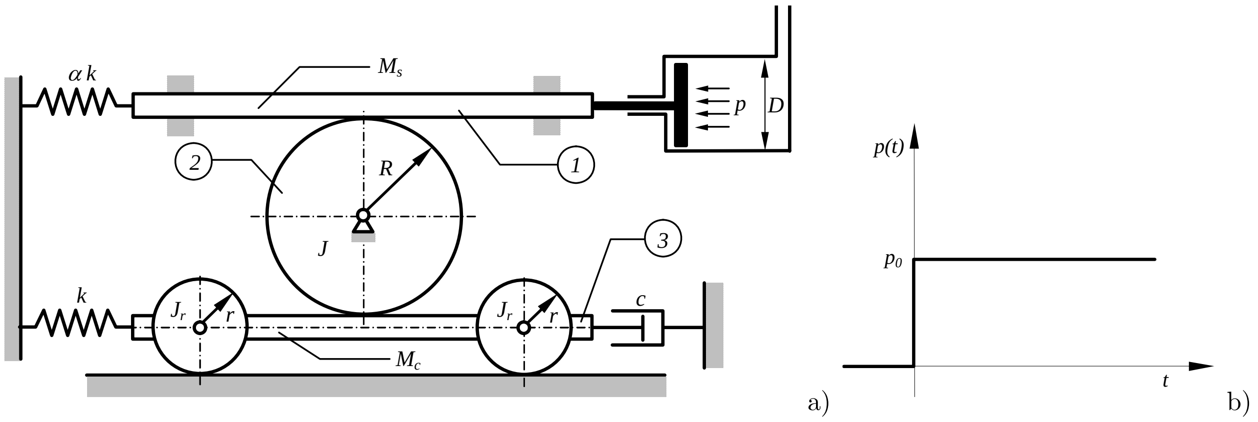


Figura 1

Il sistema rappresentato in Figura 1a è costituito dai seguenti elementi:

- una slitta (1) dotata di cremagliera nella parte inferiore, scorrevole senza attrito all'interno di una guida rettilinea;
- una ruota dentata (2) di raggio primitivo R;
- un carrello (3) con quattro ruote di raggio r, dotato di cremagliera nella parte superiore, che riceve il moto dalla ruota dentata;
- un cilindro idraulico in cui scorre un pistone collegato alla slitta (1);
- due molle ed uno smorzatore viscoso disposti come in figura;

Per semplicità non sono state rappresentate le dentature delle cremagliere e della ruota.
La molla collegata alla slitta (1) ha una rigidezza pari ad α volte quella della molla collegata al carrello.
Si supponga che le ruote del carrello rotolino senza strisciare sul terreno e che l'attrito volvente sia trascurabile.

Domande

1. ricavare l'equazione di moto del sistema;
2. calcolare la costante α in modo che la frequenza propria (non smorzata) del sistema sia pari a 2 Hz;
3. calcolare la costante dello smorzatore in modo che il fattore di smorzamento del sistema risulti pari al 70%;
4. nell'ipotesi che all'istante iniziale il sistema sia fermo nella posizione di equilibrio, determinare il moto del carrello quando la pressione nel cilindro idraulico subisce una variazione a gradino (come indicato in Figura 1b);
5. tracciare un grafico qualitativo che rappresenti lo spostamento del carrello in funzione del tempo.

Dati

- Massa della slitta (1) (pistone compreso) . . . . $M_s = 35$ kg
- Massa del carrello (3) (ruote comprese) . . . . $M_c = 50$ kg
- Momento d'inerzia della ruota dentata (2) rispetto all'asse di rotazione . . . . $J = 0.025\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Momento d'inerzia baricentrico delle ruote del carrello . . . . $J_r = 2 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Raggio primitivo della ruota dentata . . . . $R = 80$ mm
- Raggio delle ruote del carrello . . . . $r = 30$ mm
- Rigidezza della molla collegata al carrello . . . . $k = 10000$ N/m
- Pressione nel cilindro idraulico . . . . $p_0 = 160$ kPa
- Diametro del cilindro idraulico . . . . $D = 65$ mm

Esercizio 30 - Cod. VIB-118

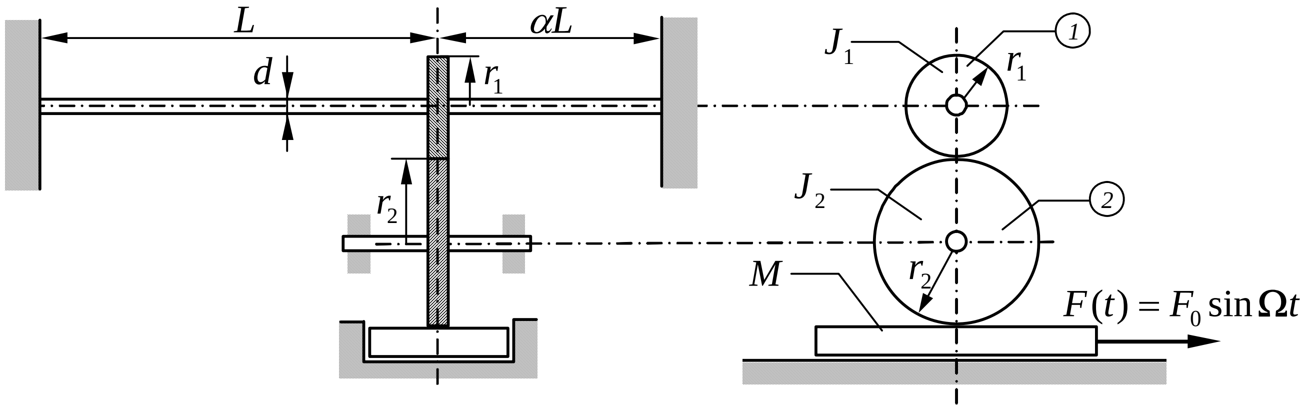


Figura 1

In Figura 1 è rappresentato un sistema meccanico costituito da due ruote dentate che trasmettono il movimento ad una slitta scorrevole senza attrito in una guida orizzontale.
La ruota dentata (1) è vincolata al telaio tramite due barre di torsione di acciaio, aventi uguale diametro e differente lunghezza, mentre la ruota (2) è libera di ruotare attorno al proprio asse.
Supponendo trascurabili tutti gli attriti e le masse delle barre di torsione, si chiede di:

1. ricavare l'equazione di moto del sistema utilizzando il metodo di Lagrange;
2. calcolare la costante α in modo che la pulsazione propria del sistema sia pari a $\omega = 40\,\text{rad/s}$;
3. nel caso in cui al carrello venga applicata una forza variabile con legge sinusoidale $F(t) = F_0 \sin \Omega t$, determinare per quali valori della pulsazione Ω l'ampiezza di oscillazione della slitta risulta inferiore a 5 mm.

Dati

- Momento d'inerzia delle ruota dentate .... $J_1 = 0.02$ kg m^2 $J_2 = 0.25$ kg m^2
- Massa della slitta .... $M = 35$ kg
- Raggi primitivi delle ruote dentate .... $r_1 = 70$ mm $r_2 = 180$ mm
- Diametro delle barre di torsione .... $d = 10$ mm
- Lunghezza delle barra di torsione di sinistra .... $L = 800$ mm
- Intensità della forza sinusoidale .... $F_0 = 600$ N
- Modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio .... $G = 80$ kN/mm^2

Esercizio 31 - Cod. VIB-119

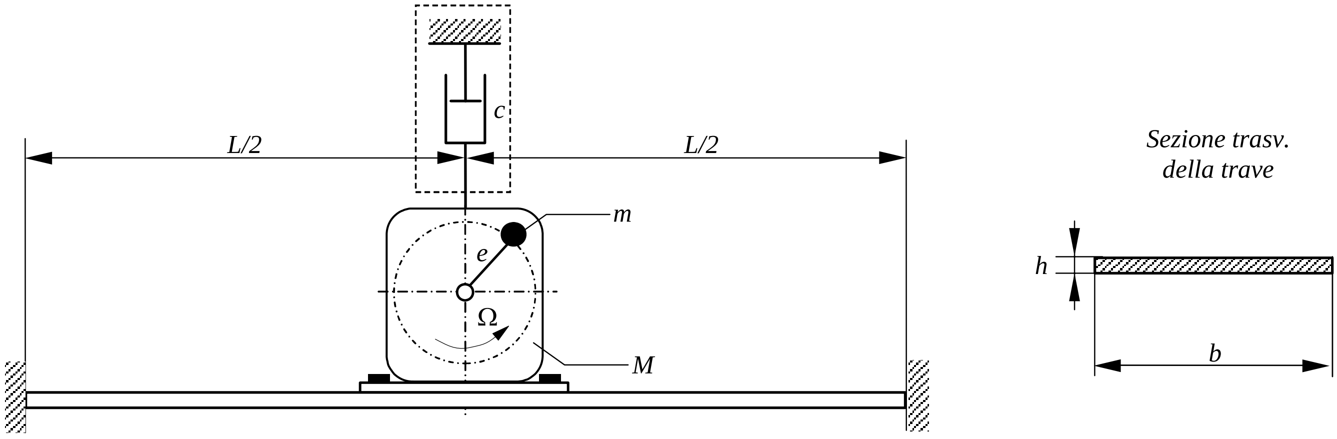


Figura 1

Si consideri il sistema in Figura 1, costituito da una trave di acciaio, incastrata ad entrambi gli estremi, sulla quale è montato un motore elettrico in corrispondenza del punto medio.
Sul motore, di massa M, è calettato un rotore di massa m che presenta un'eccentricità e.
Il motore deve funzionare ad una velocità angolare costante assegnata.

Domande

1. Determinare la lunghezza L della trave in modo che sia pari a 3 il rapporto fra la frequenza di rotazione del motore e la frequenza propria del sistema vibrante costituito dal motore e dalla trave elastica (si ritenga trascurabile la massa propria della trave);
2. calcolare l'ampiezza delle oscillazioni del motore per la velocità di rotazione assegnata;
3. supponendo ora di dimezzare la velocità di rotazione del motore, calcolare la costante c dello smorzatore (da inserire nella posizione indicata in figura), in modo che l'ampiezza delle vibrazioni rimanga uguale al valore calcolato al punto 2.

Dati

- Massa del motore (escluso il rotore) .... $M = 80$ kg
- Massa del rotore eccentrico .... $m = 0.8$ kg
- Eccentricità del rotore .... $e = 12$ mm
- Dimensioni della sezione trasversale della mensola .... $b = 100$ mm $h = 10$ mm
- Modulo di Young dell'acciaio .... $E = 206000$ MPa
- Velocità angolare del motore .... $\Omega = 300$ rad/s

Esercizio 32 - Cod. VIB-120

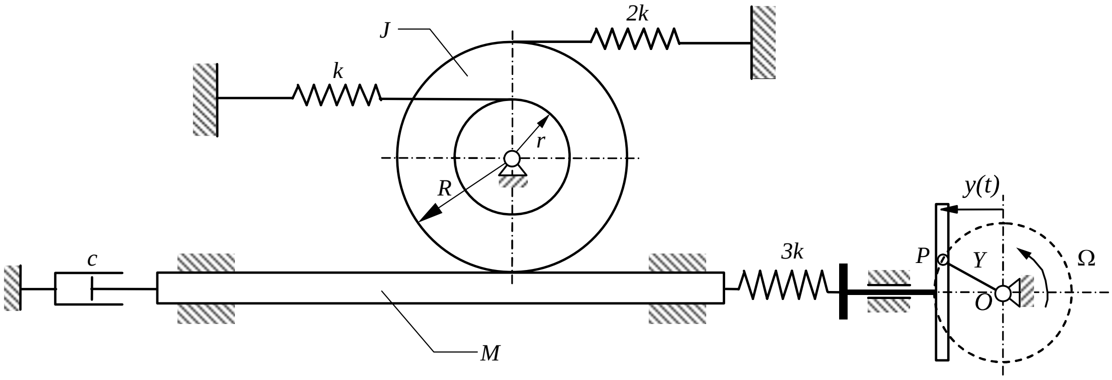


Figura 1

In Figura 1 è rappresentato un sistema vibrante costituito dagli elementi sotto indicati:

- una coppia di ruote coassiali di raggio r ed R collegate a due molle come in figura;
- una slitta di massa M scorrevole in direzione orizzontale su due supporti;
- un manovellismo a croce che trasmette il moto alla slitta tramite una molla;
- uno smorzatore viscoso, collegato alla slitta come in figura.

Si supponga che l'attrito dei supporti sia trascurabile, che la trasmissione del moto fra la slitta e la ruota di raggio maggiore avvenga in assenza di slittamento e che la manovella OP ruoti a velocità angolare costante Ω.

Domande

1. Scrivere l'equazione di moto del sistema vibrante;
2. calcolare la frequenza propria (non smorzata) del sistema;
3. determinare la costante c dello smorzatore in modo che, in condizioni di regime, l'ampiezza delle vibrazioni dei dischi coassiali sia di 5°;
4. calcolare il fattore adimensionale di smorzamento del sistema, utilizzando il valore di c ricavato al punto precedente;
5. calcolare i valori massimi della velocità e dell'accelerazione della slitta in condizioni di regime (sempre per il valore di smorzamento precedentemente determinato).

Dati

- Massa della slitta .... $M = 15$ kg
- Momento d'inerzia della coppia di ruote coassiali .... $J = 0.2\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Rigidezza di una delle tre molle .... $k = 800$ N/m
- Raggi delle ruote coassiali .... $r = 100$ mm $R = 200$ mm
- Lunghezza della manovella OP .... $Y = 120$ mm
- Velocità di rotazione della manovella .... $\Omega = 30$ rad/s

Esercizio 33 - Cod. VIB-121

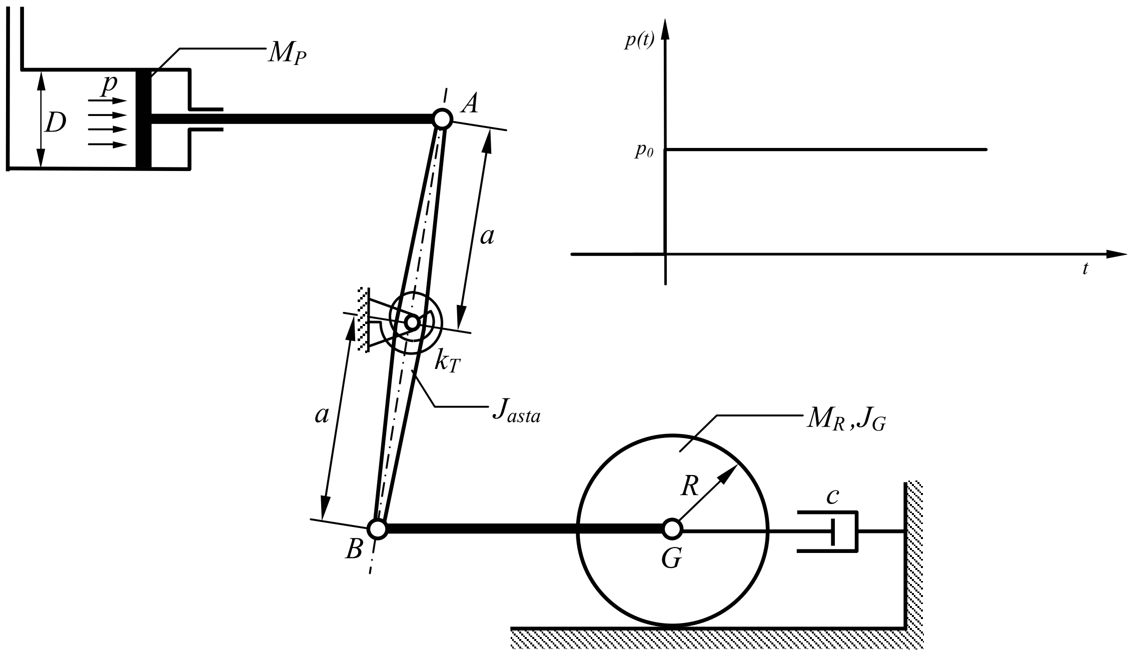


Figura 1

Per il sistema vibrante rappresentato in Figura 1, nell'ipotesi che l'asta AB compia piccole oscillazioni attorno alla posizione verticale ed il rullo rotoli senza strisciare sul piano di appoggio, si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto;
2. calcolare la frequenza propria (non smorzata);
3. determinare la costante c dello smorzatore in modo che il grado di smorzamento risulti pari al 30%;
4. studiare le oscillazioni libere del sistema, quando l'asta viene ruotata di 5° in senso orario rispetto alla verticale (si utilizzi il valore di c precedentemente calcolato e si ritenga nulla la pressione del fluido nel cilindro);
5. determinare l'andamento temporale delle oscillazioni dell'asta AB, quando la pressione del fluido nel cilindro subisce una variazione a gradino (si supponga che il sistema sia in quiete all'istante iniziale, con l'asta AB in posizione verticale).

Dati

- Massa del pistone .... $M_P = 5$ kg
- Momento d'inerzia dell'asta AB rispetto al perno .... $J_{asta} = 0.12$ kg m^2
- Massa del rullo .... $M_R = 12$ kg
- Momento d'inerzia baricentrico del rullo .... $J_G = 0.15$ kg m^2
- Rigidezza della molla a spirale .... $k_T = 400$ Nm/rad
- Raggio del rullo .... $R = 150$ mm
- Semi-lunghezza dell'asta AB .... $a = 250$ mm
- Pressione nel cilindro .... $p_0 = 50$ kPa
- Diametro del cilindro .... $D = 50$ mm

Esercizio 34 - Cod. VIB-125

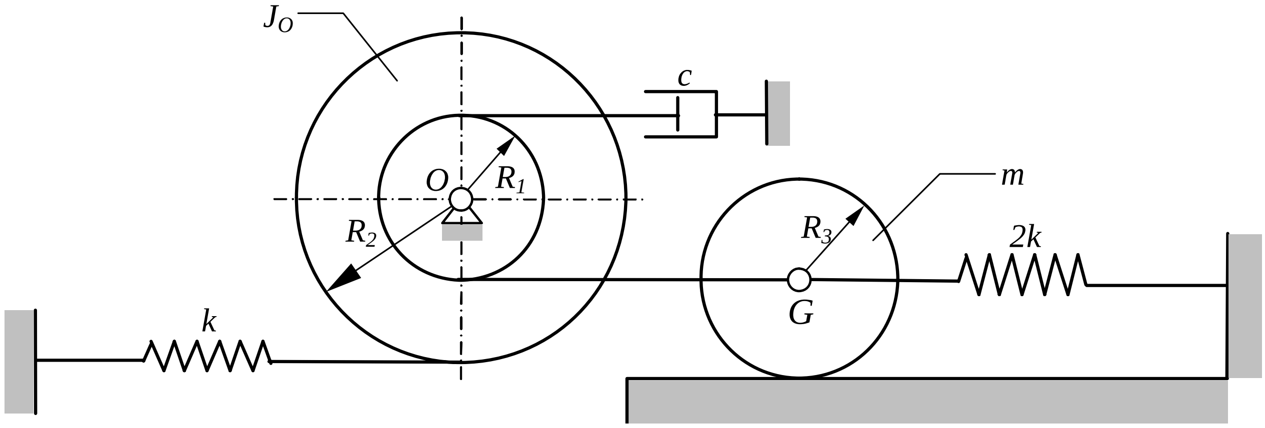


Figura 1

Si consideri il sistema in Figura 1, costituito dai seguenti elementi:

- una coppia di pulegge coassiali, ruotanti attorno al perno O, aventi raggio R_1 ed R_2 rispettivamente;
- un rullo omogeneo di raggio R_3 che rotola senza strisciare sul terreno sottostante;
- due molle di rigidezza k e $2k$ disposte come in figura;
- uno smorzatore viscoso collegato alla puleggia di raggio R_1;
- una tratto di fune inestensibile che collega la puleggia di raggio R_2 al centro del rullo.

Si supponga che alle molle venga assegnato un opportuno precarico, in modo tale che il tratto di fune risulti sempre in trazione.

Domande

1. scrivere l'equazione di moto del sistema vibrante;
2. calcolare il valore della rigidezza k in modo che la frequenza propria (non smorzata) del sistema sia pari a 2 Hz;
3. determinare il valore della costante c dello smorzatore in modo che il fattore di smorzamento del sistema risulti dell' 8%;
4. utilizzando i valori di k e c precedentemente calcolati, determinare la legge di moto del centro del rullo, quando questo viene spostato di 50 mm verso destra rispetto alla posizione di equilibrio e successivamente rilasciato (si ritenga nulla la velocità iniziale del rullo).
5. tracciare un grafico qualitativo che rappresenti l'andamento delle vibrazioni in funzione del tempo;
6. calcolare la riduzione percentuale dell'ampiezza di vibrazione dopo 3 cicli completi.

Dati

- Momento d'inerzia complessivo delle due pulegge coassiali .... $J_O = 0.5\ \text{kg}\,\text{m}^2$
- Massa del rullo .... $m = 25$ kg
- Raggio della puleggia piccola .... $R_1 = 80$ mm
- Raggio della puleggia grande .... $R_2 = 160$ mm
- Raggio del rullo .... $R_3 = 110$ mm

Esercizio 35 - Cod. VIB-126

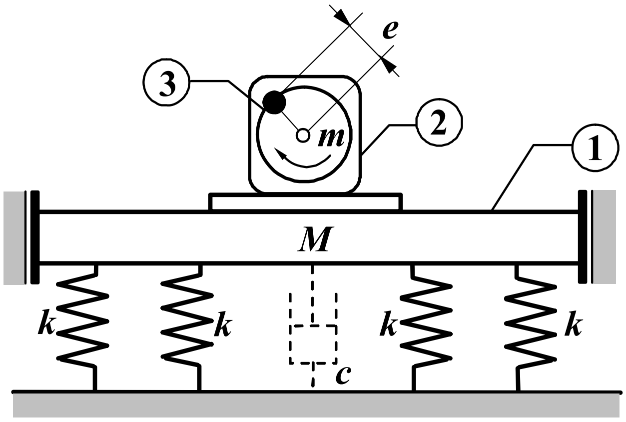


Figura 1

Il sistema vibrante rappresentato in Figura 1 è costituito da una piattaforma (1) sulla quale è montato un motore elettrico (2) dotato di un rotore (3) con eccentricità pari ad e.
La piattaforma è vincolata tramite guide rettilinee e pertanto può effettuare spostamenti soltanto in direzione verticale.
Il collegamento tra la piattaforma ed il telaio è costituito da quattro molle elicoidali, aventi ciascuna n_s spire utili di diametro D; ogni molla è realizzata con un filo di acciaio di diametro d.
Supponendo trascurabili tutti i fenomeni di smorzamento dovuti agli effetti dell'attrito, si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto del sistema vibrante;
2. determinare la rigidezza equivalente della sospensione elastica;
3. calcolare la frequenza propria del sistema;
4. calcolare, per via grafica o analitica, gli intervalli di velocità di rotazione del motore per cui l'ampiezza di vibrazione risulta inferiore a 2 mm;
5. supponendo di introdurre nel sistema uno smorzatore viscoso (disposto come in figura), determinare il valore della costante di smorzamento c in modo che l'ampiezza di vibrazione risulti sempre pari a 2 mm quando il sistema opera in condizioni di risonanza.

Dati

- Massa traslante (piattaforma e motore - rotore escluso) .... $M = 3$ kg
- Massa del rotore eccentrico .... $m = 0.6$ kg
- Eccentricità del rotore .... $e = 8$ mm
- Numero di spire utili di ogni molla .... $n_s = 5$
- Diametro delle spire .... $D = 15$ mm
- Diametro del filo .... $d = 1.5$ mm
- Modulo di elasticità tangenziale dell'acciaio .... $G = 80$ kN/mm^2

Nota. Per il calcolo della rigidezza di una molla elicoidale si utilizzi la formula sotto riportata:

$$k = \frac{Gd^4}{8\,n_s D^3}$$

Esercizio 36 - Cod. VIB-127

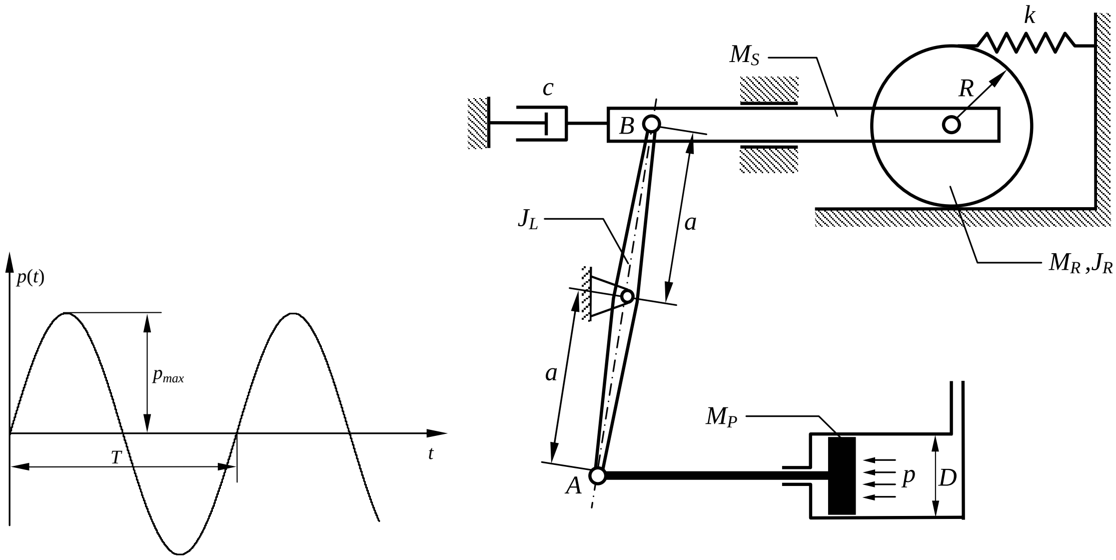


Figura 1

Per il sistema vibrante rappresentato in Figura 1, nell'ipotesi che l'asta AB compia piccole oscillazioni ed il rullo rotoli senza strisciare, si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto;
2. determinare la rigidezza k della molla in modo che la pulsazione propria non smorzata del sistema risulti uguale a 30 rad/s;
3. determinare la costante c dello smorzatore viscoso in modo che il fattore di smorzamento adimensionale del sistema risulti pari al 20%;
4. supponendo nulla la pressione nel cilindro, studiare le vibrazioni libere del sistema quando la slitta viene spostata di 25 mm verso destra e successivamente rilasciata (si consideri pertanto nulla la velocità iniziale); tracciare inoltre un grafico qualitativo che rappresenti l'andamento nel tempo dello spostamento della slitta;
5. supponendo che la variazione nel tempo della pressione nel cilindro sia approssimabile mediante la legge sinusoidale[4] rappresentata in Figura 1, determinare l'andamento delle oscillazioni della slitta in condizioni di regime.

Dati

- Massa del pistone .... $M_P = 4$ kg
- Massa della slitta .... $M_S = 12$ kg
- Massa del rullo .... $M_R = 6$ kg
- Momento d'inerzia della leva rispetto al perno .... $J_L = 0.2\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Momento d'inerzia baricentrico del rullo .... $J_R = 0.075\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Raggio del rullo .... $R = 150$ mm
- Semi-lunghezza della leva .... $a = 300$ mm
- Pressione massima nel cilindro .... $p_{max} = 40000$ Pa
- Periodo con cui varia la pressione nel cilindro .... $T = 2$ s
- Diametro del cilindro .... $D = 130$ mm

[4] I valori negativi indicano una depressione nel cilindro.

Esercizio 37 - Cod. VIB-130

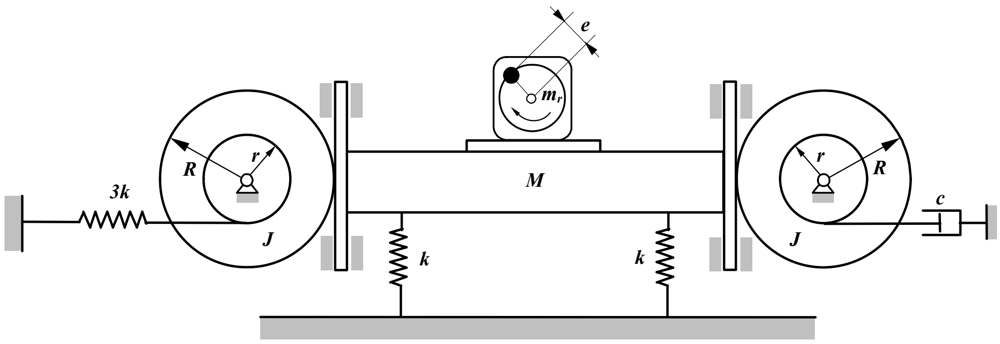


Figura 1

Il sistema vibrante rappresentato in Figura 1, è costituito da una piattaforma traslante di massa M che può muoversi soltanto in direzione verticale grazie alla presenza di due guide.
Le guide presentano attrito trascurabile e sulla loro parte esterna sono ricavate due cremagliere che permettono la trasmissione del moto senza slittamenti alle due ruote dentate laterali (per semplicità di rappresentazione non sono state disegnate le dentature delle cremagliere e delle ruote).
Sulla piattaforma è montato un motore elettrico, il cui rotore, di massa m_r, ha un'eccentricità pari ad e. La piattaforma è fissata a due supporti elastici schematizzati mediante molle di uguale costante elastica k.
Coassialmente alle ruote dentate sono montate due pulegge di raggio r. La puleggia di sinistra è collegata ad una molla di rigidezza $3k$, mentre quella di destra è collegata ad uno smorzatore viscoso di costante c.

Domande

1. scrivere l'equazione di moto del sistema vibrante;
2. determinare la rigidezza k dei supporti elastici in modo che la frequenza propria non smorzata del sistema risulti uguale a 8 Hz;
3. determinare la costante c dello smorzatore viscoso in modo che il fattore di smorzamento adimensionale del sistema risulti pari al 20%;
4. nell'ipotesi che il motore sia fermo, studiare le vibrazioni libere del sistema quando la slitta viene spostata di 50 mm verso l'alto e successivamente rilasciata (si consideri pertanto nulla la velocità iniziale);
5. tracciare inoltre un grafico qualitativo che rappresenti l'andamento nel tempo dello spostamento della slitta durante la vibrazione libera;
6. calcolare la riduzione percentuale dell'ampiezza di vibrazione dopo 2 cicli di vibrazione libera;
7. supponendo che il motore venga azionato a velocità angolare costante, determinare ampiezza e fase della legge di moto della piattaforma in condizioni di regime;
8. nell'ipotesi che lo smorzatore viscoso venga scollegato, dire per quali valori di velocità angolare del motore l'accelerazione della piattaforma (a regime) risulta superiore a 1.5 m/s^2.

Dati

- Massa della piattaforma (motore compreso) .... $M = 10$ kg
- Massa del rotore eccentrico .... $m_r = 0.5$ kg
- Momento d'inerzia dei gruppi laterali ruota dentata-puleggia .... $J = 0.2$ kg m^2
- Raggio primitivo delle ruote dentate .... $R = 150$ mm
- Raggio delle pulegge .... $r = 75$ mm
- Eccentricità del rotore .... $e = 6$ mm
- Velocità angolare del motore elettrico .... $n = 1200$ giri/min

Esercizio 38 - Cod. VIB-131

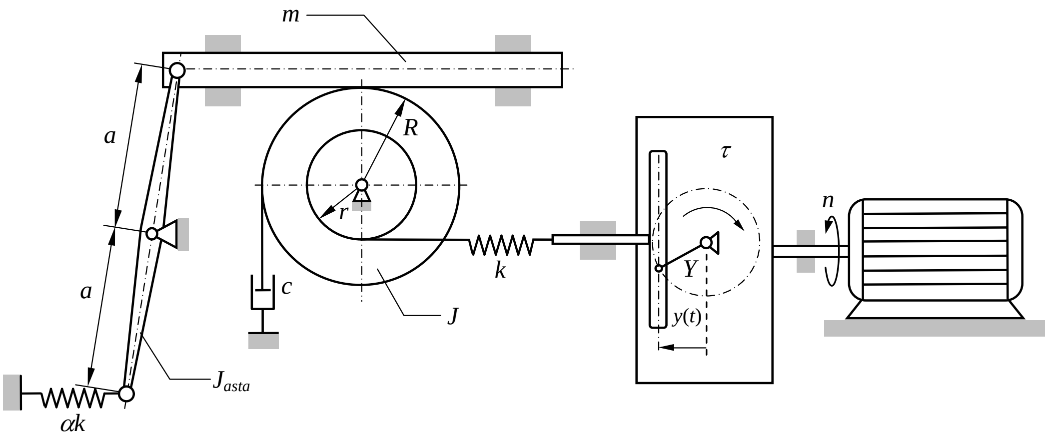


Figura 1

Il sistema vibrante rappresentato in Figura 1 è azionato da un manovellismo a croce tramite un motore elettrico ed un riduttore di velocità avente rapporto di trasmissione τ. Il manovellismo a croce trasmette il moto ad una coppia di dischi coassiali tramite un elemento elastico di rigidezza k. Sul disco di raggio maggiore agisce uno smorzatore viscoso di costante c. Una slitta di massa m, scorrevole in direzione verticale, riceve il moto per attrito dal disco di raggio R (si ipotizzi assenza di slittamento fra il disco e la slitta). La slitta è collegata ad un'asta di lunghezza $2a$ incernierata nel punto medio; una molla di rigidezza αk è fissata all'estremo destro dell'asta. Si ipotizzi che i supporti della slitta abbiano attrito trascurabile e che l'asta compia piccole oscillazioni.

Domande

1. scrivere l'equazione di moto del sistema vibrante;
2. calcolare il valore della costante α in modo che la frequenza propria non smorzata del sistema risulti uguale a 3 Hz;
3. determinare la costante c dello smorzatore in modo che il sistema sia in condizioni di smorzamento critico;
4. nell'ipotesi che il motore sia fermo, studiare le vibrazioni libere del sistema quando la slitta viene spostata di 35 mm verso l'alto e successivamente rilasciata (si consideri pertanto nulla la velocità iniziale);
5. rappresentare in forma grafica l'andamento nel tempo dello spostamento della slitta durante la vibrazione libera;
6. calcolare la velocità massima (in valore assoluto) della slitta durante la fase di moto libero;
7. supponendo che il motore venga azionato a velocità angolare costante, determinare ampiezza e fase della legge di moto della slitta in condizioni di regime;
8. calcolare l'aumento percentuale dell'ampiezza di vibrazione a regime quando lo smorzatore viene scollegato.

Dati

- Massa della slitta .... $m = 3$ kg
- Momento d'inerzia della coppia di dischi coassiali .... $J = 0.015$ kg m^2
- Momento d'inerzia dell'asta oscillante rispetto al perno .... $J_{asta} = 0.04$ kg m^2
- Rigidezza della molla collegata al manovellismo a croce .... $k = 1200$ N/m
- Semi-lunghezza dell'asta oscillante .... $a = 200$ mm
- Raggio del disco maggiore .... $R = 150$ mm
- Raggio del disco minore .... $r = 75$ mm
- Lunghezza della manovella .... $Y = 80$ mm
- Rapporto di trasmissione del riduttore .... $\tau = 1/20$
- Velocità angolare del motore elettrico .... $n = 1440$ giri/min

Esercizio 39 - Cod. VIB-133

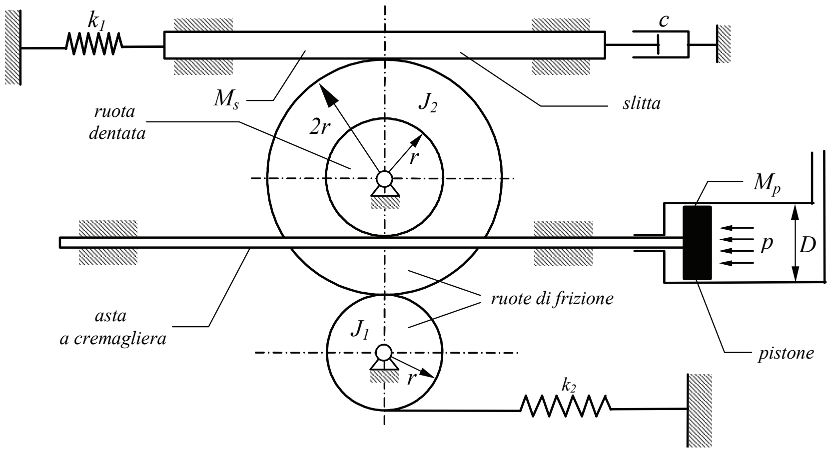


Figura 1

Il sistema meccanico in Figura 1 viene azionato da un pistone idraulico mediante un'asta a cremagliera che, tramite la dentatura (non rappresentata in figura), trasmette il moto alla ruota dentata di raggio primitivo r. La ruota dentata è solidale ad una ruota di frizione di raggio $2r$ che trasmette il moto alla slitta superiore e ad un'altra ruota di frizione di raggio r. Alla slitta sono collegati una molla di rigidezza k_1 ed uno smorzatore viscoso di costante c. Una molla di rigidezza k_2 è collegata alla ruota di frizione di diametro minore come indicato in figura. Nell'ipotesi che non vi siano slittamenti delle ruote di frizione, si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto del sistema;
2. calcolare la massa M_s della slitta in moto che la frequenza propria (non smorzata) del sistema sia pari a 2 Hz;
3. *Moto libero non smorzato:* nell'ipotesi che la pressione nel cilindro sia nulla e che lo smorzatore venga scollegato, studiare le vibrazioni del sistema quando la slitta viene spostata di 50 mm verso destra e successivamente rilasciata (si consideri velocità iniziale nulla); dare una rappresentazione grafica qualitativa dell'andamento delle vibrazioni nel tempo;
4. *Moto libero smorzato:* sempre nell'ipotesi di pressione nulla nel cilindro, determinare, con il metodo del decremento logaritmico, il valore della costante di smorzamento c in modo che l'ampiezza di oscillazione della slitta risulti il 4% di quella iniziale dopo tre oscillazioni complete; si calcoli anche in questo caso l'andamento delle oscillazioni nel tempo e se ne dia una una rappresentazione grafica qualitativa, utilizzando sempre le condizioni iniziali indicate nel punto 3;
5. *Moto forzato in regime sinusoidale permanente:* supponendo ora che la pressione nel cilindro oscilli secondo la legge sinusoidale $p(t) = p_0 \sin \Omega t$, determinare il movimento del pistone e della slitta in condizioni di regime[5];
6. *Risposta al gradino*: si supponga che il sistema sia fermo nella posizione di equilibrio: studiare la risposta del sistema quando la pressione nel cilindro subisce una rapida variazione (schematizzabile tramite una funzione a gradino), passando dal valore nullo iniziale al valore finale p_0 e mantenendosi costante nel tempo.

Dati

- Massa del gruppo pistone - asta a cremagliera .... $M_p = 15$ kg
- Momenti d'inerzia .... $J_1 = 0.005\ \mathrm{kg\,m^2}$ $J_2 = 0.04\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Raggio .... $r = 60$ mm
- Rigidezza delle molle .... $k_1 = 3000$ N/m $k_2 = 4000$ N/m
- Pressione massima nel cilindro .... $p_0 = 1.2 \times 10^5$ Pa
- Pulsazione cui cui varia la pressione del cilindro .... $\Omega = 8$ rad/s
- Diametro del cilindro idraulico .... $D = 30$ mm

Nota: Si risponda alle domande n.5 e n.6 utilizzando il valore di c calcolato in risposta alla domanda n.4.

[5]I valori negativi indicano una depressione nel cilindro.

Esercizio 40 - Cod. VIB-134

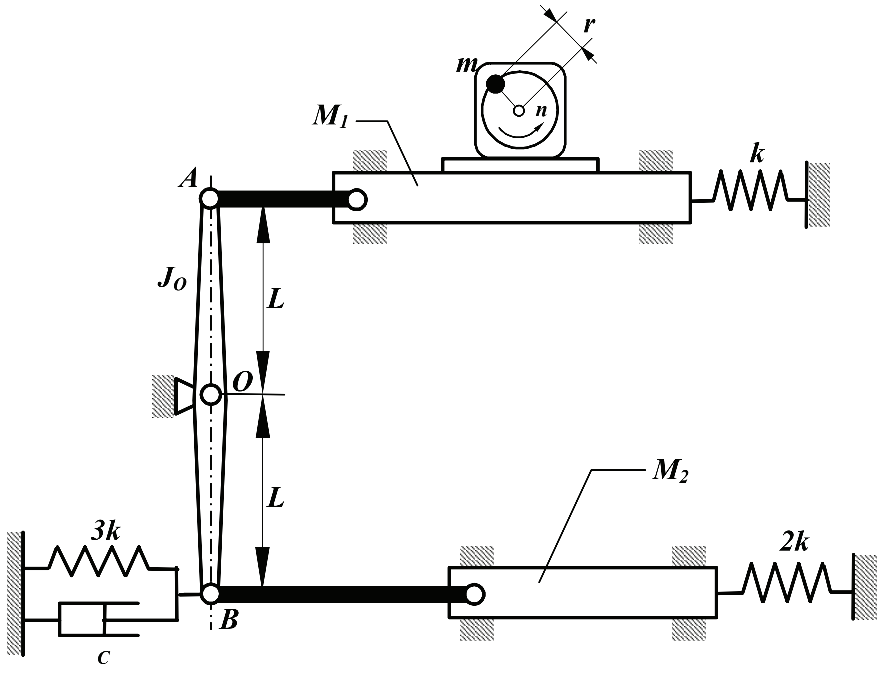


Figura 1

Per il sistema rappresentato in Figura 1, nell'ipotesi che l'asta AB compia piccole oscillazioni, si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto;
2. calcolare la frequenza propria (non smorzata);
3. *Moto libero non smorzato:* nell'ipotesi che il motore sia fermo con il rotore bloccato e che lo smorzatore venga scollegato, studiare le vibrazioni del sistema quando la slitta superiore viene spostata di 30 mm verso sinistra e successivamente rilasciata (si consideri velocità iniziale nulla); dare una rappresentazione grafica qualitativa dell'andamento delle vibrazioni nel tempo;
4. *Moto libero smorzato:* calcolare la costante di smorzamento c in modo che si abbia smorzamento critico; si calcoli anche in questo caso l'andamento delle oscillazioni nel tempo e se ne dia una rappresentazione grafica qualitativa, utilizzando sempre le condizioni iniziali indicate nel punto 3; si determini poi il massimo valore di velocità che viene raggiunto dalle slitte durante la fase di moto libero.
5. *Moto forzato in regime sinusoidale permanente:* supponendo ora che il motore venga azionato a velocità angolare costante, determinare la legge di moto delle slitte in condizioni di regime, calcolare infine l'incremento dell'ampiezza di vibrazione quando lo smorzatore viene scollegato.

Dati

- Massa delle slitte .... $M_1 = 5$ kg $M_2 = 2$ kg
- Massa eccentrica .... $m = 0.5$ kg
- Momento d'inerzia dell'asta AB rispetto al punto O .... $J_O = 0.04\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Rigidezza .... $k = 2000$ N/m
- Eccentricità .... $r = 25$ mm
- Lunghezza dei bracci della leva .... $L = 200$ mm
- Velocità angolare del motore .... $n = 500$ giri/min

Nota: Si risponda alla domanda n.5 utilizzando il valore di c corrispondente alla condizione di smorzamento critico (vedi punto 4).

Esercizio 41 - Cod. VIB-137

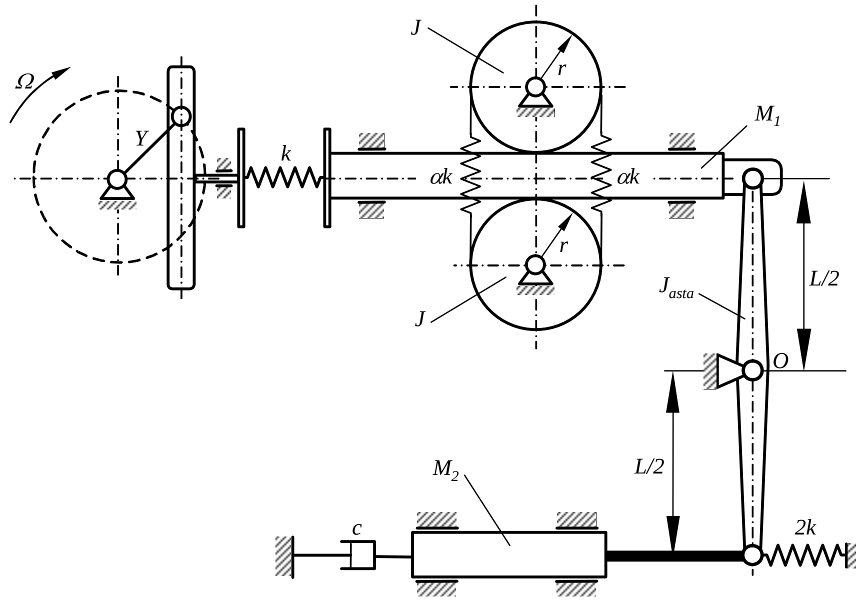


Figura 1

Il sistema meccanico in Figura 1 viene azionato da un manovellismo a croce, che trasmette il movimento tramite una trasmissione elastica schematizzata da una molla di rigidezza k. La slitta superiore trasmette il movimento a due ruote di frizione, collegate fra di loro mediante una cinghia elastica. Tramite una leva di lunghezza L, il moto viene trasmesso alla slitta inferiore. Nell'ipotesi che la leva compia piccole oscillazioni nell'intorno della posizione verticale e che non vi sia slittamento fra le ruote di frizione e la slitta superiore, si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto del sistema;
2. calcolare la costante α in modo che la frequenza propria (non smorzata) del sistema sia pari a 10 Hz;
3. calcolare la costante c dello smorzatore in modo che il fattore di smorzamento del sistema risulti uguale al 20%;
4. nell'ipotesi che la manovella sia bloccata, studiare le vibrazioni del sistema quando la slitta superiore viene spostata di 25 mm verso destra e successivamente rilasciata (si consideri velocità iniziale nulla);
5. rappresentare a livello qualitativo l'andamento delle vibrazioni nel tempo e calcolare la riduzione percentuale dell'ampiezza di vibrazione dopo 2 cicli;
6. supponendo ora che la manovella ruoti a velocità angolare costante, determinare il movimento del sistema a regime, calcolando l'ampiezza di vibrazione delle due slitte e lo sfasamento rispetto alla legge di moto imposta dal manovellismo a croce;
7. rappresentare a livello qualitativo i diagrammi (ampiezza e fase) della risposta in frequenza del sistema;
8. supponendo di scollegare lo smorzatore, dire per quali valori della velocità angolare della manovella l'ampiezza di vibrazione nel moto a regime risulta inferiore a 20 mm.

Dati

- Massa della slitta superiore .... $M_1 = 10$ kg
- Massa della slitta inferiore .... $M_2 = 8$ kg
- Momento d'inerzia dell'asta .... $J_{asta} = 0.08\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Momento d'inerzia delle ruote di frizione .... $J = 0.025\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Lunghezza dell'asta .... $L = 300$ mm
- Raggio delle ruote di frizione .... $r = 60$ mm
- Rigidezza .... $k = 10000$ N/m
- Lunghezza della manovella .... $Y = 80$ mm
- Velocità angolare della manovella .... $\Omega = 40$ rad/s

Esercizio 42 - Cod. VIB-138

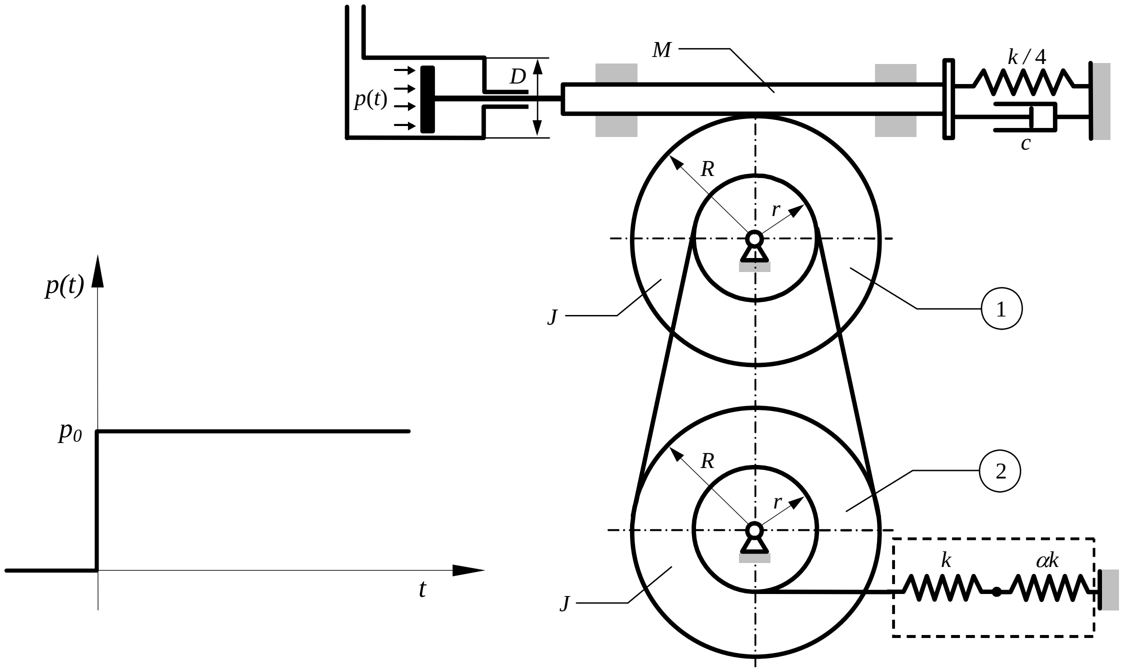


Figura 1

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in Figura 1. Nell'ipotesi che non vi sia slittamento fra la slitta e la ruota di raggio R, si chiede di:

1. calcolare la costante α in modo che la rigidezza equivalente delle due molle all'interno del riquadro tratteggiato sia uguale alla rigidezza della molla collegata alla slitta;
2. scrivere l'equazione di moto del sistema;
3. calcolare la frequenza propria non smorzata;
4. calcolare la costante c dello smorzatore in modo che il sistema operi in condizioni di smorzamento critico;
5. utilizzando le condizioni iniziali sotto indicate e supponendo nulla la pressione nel cilindro, calcolare il movimento della slitta nelle condizioni di smorzamento critico e dare una rappresentazione qualitativa dello spostamento in funzione del tempo;
6. con riferimento al movimento calcolato al punto precedente, calcolare l'istante di tempo in cui la velocità della slitta assume il valore massimo;
7. si supponga di ridurre del 75% il valore della costante c dello smorzatore: si ricalcoli il fattore di smorzamento ξ del sistema, si determini nuovamente il moto della slitta e si dia una rappresentazione grafica qualitativa dello spostamento in funzione del tempo;
8. supponendo di scollegare lo smorzatore, si calcoli il moto della slitta (per condizioni iniziali nulle) quando la pressione nel cilindro subisce una variazione a gradino, passando dal valore nullo al valore p_0 assegnato; infine si dia una rappresentazione qualitativa dello spostamento della slitta in funzione del tempo.

Dati

- Massa della gruppo slitta-pistone .... $M = 12$ kg
- Momento d'inerzia totale delle ruote (1) e (2) .... $J = 0.1\ \mathrm{kg\,m^2}$
- Raggi .... $r = 80$ mm $R = 160$ mm
- Rigidezza .... $k = 15000$ N/m
- Condizioni iniziali (per le domande 5, 6 e 7) .... $x(0) = 70$ mm $\dot{x}(0) = 0$
- Pressione del fluido nel cilindro .... $p_0 = 60$ kPa
- Diametro del cilindro .... $D = 90$ mm