

## Calcolo delle pulsazioni proprie di un albero con due dischi alle estremità

$$f(t) := 1 \quad \omega := \frac{\beta \cdot c}{L}$$

$$\theta(x, t) := \left( A \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot x}{c}\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot x}{c}\right) \right) \cdot f(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) \text{ collect, } \frac{\omega}{c} \rightarrow \left( B \cdot \cos\left(\frac{\beta}{L} \cdot x\right) - A \cdot \sin\left(\frac{\beta}{L} \cdot x\right) \right) \cdot \frac{\beta}{L}$$

$$M_t(x, t) := G J_P \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t)$$

$$\theta(0, t) \rightarrow A$$

$$\theta(L, t) \rightarrow A \cdot \cos(\beta) + B \cdot \sin(\beta)$$

$$M_t(0, t) \rightarrow \frac{B \cdot G \cdot J_P \cdot \beta}{L}$$

$$M_t(L, t) \text{ collect, } \frac{\omega}{c} \rightarrow \left[ -G \cdot J_P \cdot (A \cdot \sin(\beta) - B \cdot \cos(\beta)) \right] \cdot \frac{\beta}{L}$$

$$J_1 \cdot \left( -\omega^2 \cdot \theta(0, t) \right) - M_t(0, t) \text{ collect, } A, B \rightarrow \left( -\frac{J_1 \cdot \beta^2 \cdot c^2}{L^2} \right) \cdot A + \left( -\frac{G \cdot J_P \cdot \beta}{L} \right) \cdot B$$

$$J_2 \cdot \left( -\omega^2 \cdot \theta(L, t) \right) + M_t(L, t) \text{ collect, } A, B \rightarrow \left( -\frac{G \cdot J_P \cdot \beta \cdot \sin(\beta)}{L} - \frac{J_2 \cdot \beta^2 \cdot c^2 \cdot \cos(\beta)}{L^2} \right) \cdot A + \left( \frac{G \cdot J_P \cdot \beta \cdot \cos(\beta)}{L} - \frac{J_2 \cdot \beta^2 \cdot c^2 \cdot \sin(\beta)}{L^2} \right) \cdot B$$

$$\underline{\underline{G}} := 80000 \cdot 10^6$$

$$\rho := 7800$$

Spessore dei dischi alle estremità (uguale per entrambi i dischi)

$$\underline{\underline{s}} := 20 \cdot 10^{-3} = 0.02$$

### Raggi dei dischi alle estremità

$$R_1 := 90 \cdot 10^{-3}$$

$$R_2 := 160 \cdot 10^{-3}$$

### Masse dei dischi alle estremità

$$M_1 := \rho \cdot \pi \cdot R_1^2 \cdot s = 3.97$$

$$M_2 := \rho \cdot \pi \cdot R_2^2 \cdot s = 12.546$$

### Momenti d'inerzia di massa dei dischi alle estremità

$$J_1 := \frac{M_1 \cdot R_1^2}{2} = 0.016$$

$$J_2 := \frac{M_2 \cdot R_2^2}{2} = 0.161$$

$$c := \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad c = 3202.563$$

### Caratteristiche geometriche dell'albero

$$d := 0.040 \quad L := 1.5$$

$$A_{sez} := \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad A_{sez} = 1.257 \times 10^{-3}$$

$$M_{alb} := \rho \cdot A_{sez} \cdot L = 14.703$$

### Calcolo della rigidezza torsionale dell'albero

$$J_P := \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 2.513 \times 10^{-7}$$

$$k_T := \frac{G \cdot J_P}{L} \quad k_T = 13404.129$$

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0.016 & 0 \\ 0 & 0.161 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} := \begin{pmatrix} k_T & -k_T \\ -k_T & k_T \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 13404.129 & -13404.129 \\ -13404.129 & 13404.129 \end{pmatrix}$$

$$\omega := \text{sort}\left(\sqrt{\text{eigenvals}(\mathbf{K}, \mathbf{J})}\right) \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 957.703 \end{pmatrix} \quad \text{Pulsazioni proprie del sistema discreto [rad/s]}$$

$$f_{\omega} := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 152.423 \end{pmatrix} \quad \text{Frequenze proprie del sistema discreto [Hz]}$$

$$\sqrt{\frac{k_T \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}} = 957.703 \quad \text{verifica}$$

$$f_{11}(\beta) := J_1 \cdot \left( \frac{\beta}{L} \cdot c \right)^2$$

$$f_{12}(\beta) := \frac{G \cdot J_P}{L} \cdot \beta$$

$$f_{21}(\beta) := \left[ -J_2 \cdot \left( \frac{\beta}{L} \cdot c \right)^2 \cdot \cos(\beta) \right] - \left( \frac{G \cdot J_P}{L} \cdot \beta \cdot \sin(\beta) \right)$$

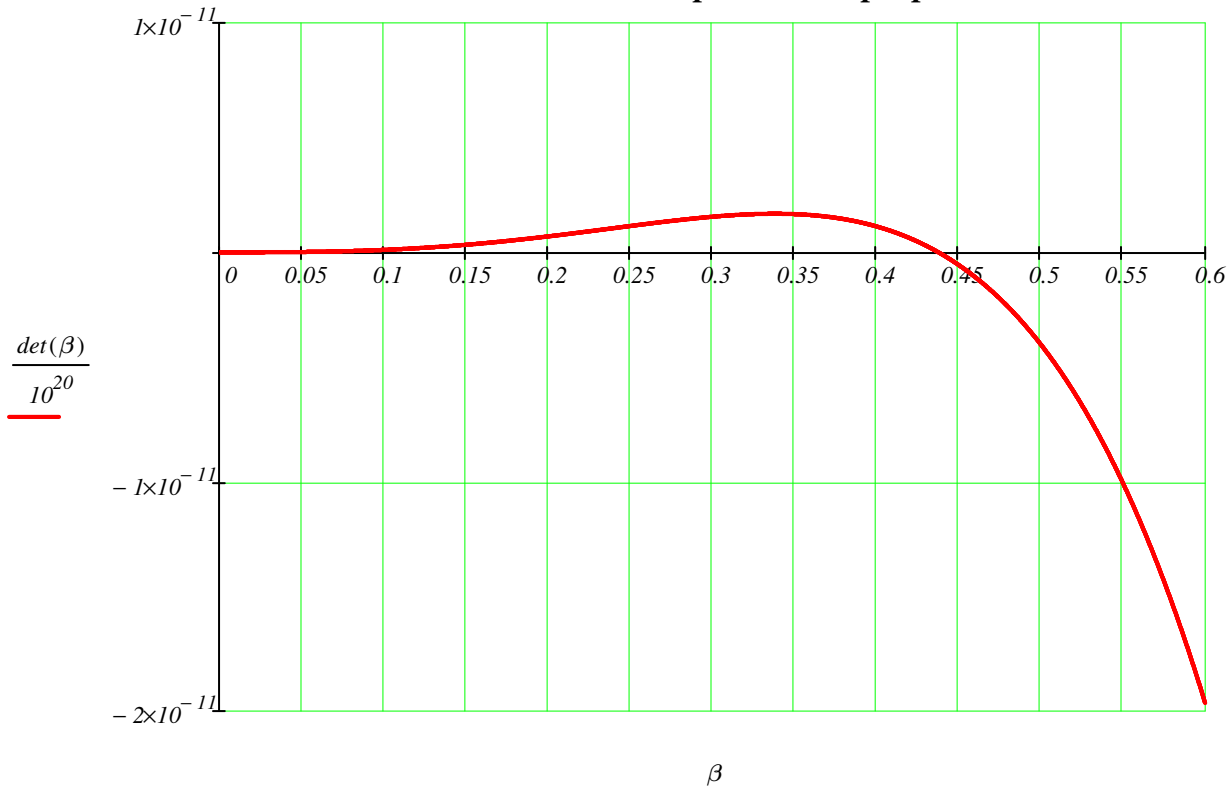
$$f_{22}(\beta) := \left( \frac{G \cdot J_P}{L} \cdot \beta \cdot \cos(\beta) \right) - J_2 \cdot \left( \frac{\beta}{L} \cdot c \right)^2 \cdot \sin(\beta)$$

$$\Delta(\beta) := \begin{pmatrix} f_{11}(\beta) & f_{12}(\beta) \\ f_{21}(\beta) & f_{22}(\beta) \end{pmatrix}$$

$$\det(\beta) := |\Delta(\beta)|$$

$$\beta := 0,1 \cdot 10^{-4} .. 0.6$$

## Ricerca della 1a pulsazione propria



$$\beta := 0.45$$

$$\text{root}(\det(\beta), \beta) = 0.438$$

$$\omega_{1\_cont} := \text{root}(\det(\beta), \beta) \cdot \frac{c}{L} = 934.418$$

$$f_{1\_cont} := \frac{\omega_{1\_cont}}{2 \cdot \pi} = 148.717$$

1ª pulsazione e frequenza propria del sistema continuo

$$\omega_I = 957.702605$$

$$f_I = 152.423$$

pulsazione e frequenza propria del sistema discreto

errore percentuale sulla prima frequenza propria

$$\text{errore} := \frac{f_I - f_{1\_cont}}{f_{1\_cont}} = 2.492\%$$

$$f_I - f_{1\_cont} = 3.706$$

$$\beta := 0, 0.005.. 3.5$$

### Ricerca della 2a pulsazione propria



$$\beta := 3.2$$

$$root(det(\beta), \beta) = 3.204$$

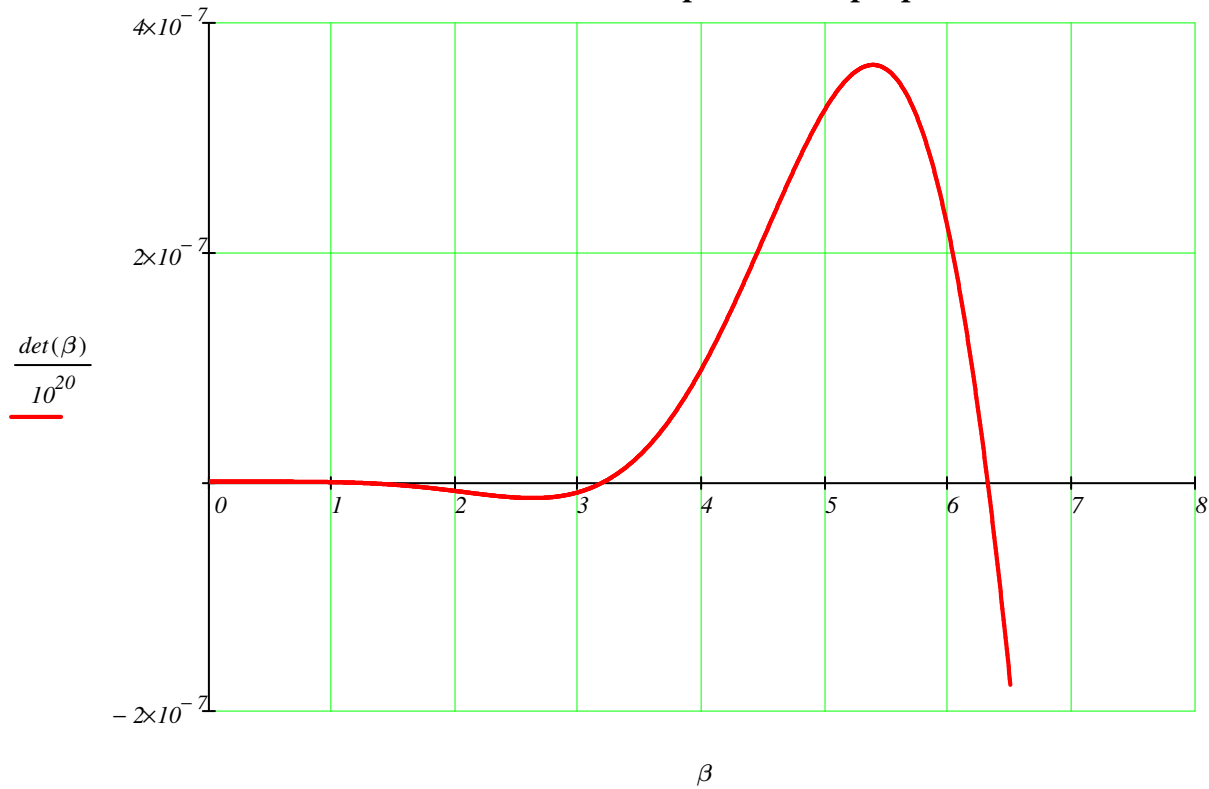
$$\omega_{2\_cont} := root(det(\beta), \beta) \cdot \frac{c}{L} = 6841.366$$

$$f_{2\_cont} := \frac{\omega_{2\_cont}}{2 \cdot \pi} = 1088.837$$

2<sup>a</sup> pulsazione e frequenza  
propria del sistema continuo

$$\beta := 0, 0.005.. 6.5$$

### Ricerca della 3a pulsazione propria



$$\beta := 6.5$$

$$\text{root}(\det(\beta), \beta) = 6.315$$

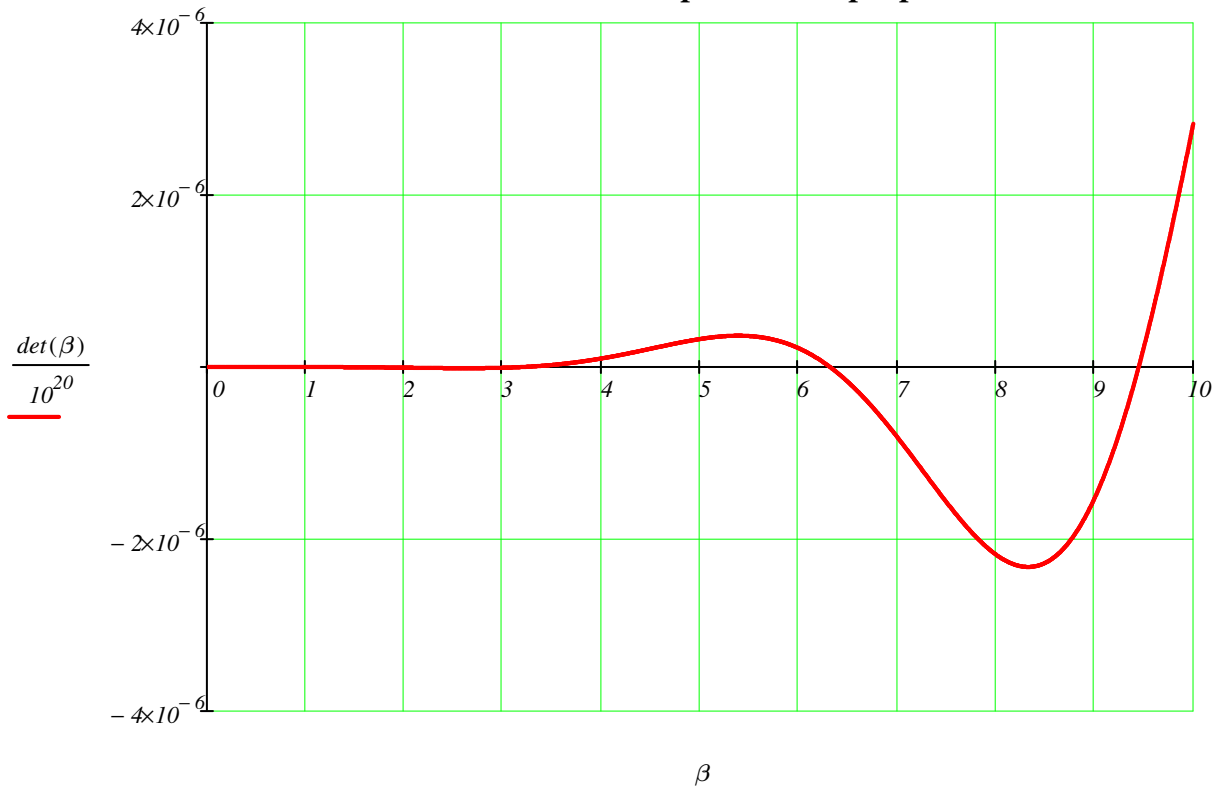
$$\omega_{3\_cont} := \text{root}(\det(\beta), \beta) \cdot \frac{c}{L} = 13482.874$$

$$f_{3\_cont} := \frac{\omega_{3\_cont}}{2 \cdot \pi} = 2145.866$$

3<sup>a</sup> pulsazione e frequenza  
propria del sistema continuo

$$\beta := 0, 0.005.. 10$$

### Ricerca della 4a pulsazione propria



$$\beta := 9.5$$

$$\text{root}(\det(\beta), \beta) = 9.446$$

$$\omega_{4\_cont} := \text{root}(\det(\beta), \beta) \cdot \frac{c}{L} = 20167.77$$

$$f_{4\_cont} := \frac{\omega_{4\_cont}}{2 \cdot \pi} = 3209.8$$

4<sup>a</sup> pulsazione e frequenza  
propria del sistema continuo