Ortogonalità dei vettori modali (esempio a 2 gdl)

$m_1 := 5 \qquad m_2 := 3$

$k_1 := 1200 \qquad k_2 := 1400 \qquad k_3 := 1200$

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} := \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2600 & -1400 \\ -1400 & 2600 \end{pmatrix}$$

Pulsazioni proprie

$$\omega := \sqrt{genvals(\mathbf{K}, \mathbf{M})} = \begin{pmatrix} 17.101 \\ 33.079 \end{pmatrix}$$

Matrice modale

$$\mathbf{\Phi} := genvecs(\mathbf{K}, \mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 1 & -0.488 \\ 0.813 & 1 \end{pmatrix}$$

$\omega_1 = 17.101 \qquad \mathbf{X_1} := \mathbf{\Phi}^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.813 \end{pmatrix}$

$\omega_2 = 33.079 \qquad \mathbf{X_2} := \mathbf{\Phi}^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} -0.488 \\ 1 \end{pmatrix}$

Proprietà di ortogonalità dei vettori modali rispetto alla matrice di massa "M"

$$\mathbf{X_1}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X_2} = 0 \qquad\qquad \mathbf{X_2}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X_1} = 0$$

Proprietà di ortogonalità dei vettori modali rispetto alla matrice di rigidezza "K"

$$\mathbf{X_1}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{X_2} = 0 \qquad\qquad \mathbf{X_2}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{X_1} = 0$$

$$\mathbf{M_{star}} := \mathbf{\Phi}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 6.981 & 0 \\ 0 & 4.189 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M_{star}}_{1,1} = 6.981 \qquad\qquad \mathbf{M_{star}}_{2,2} = 4.189$$

$$\mathbf{K_{star}} := \mathbf{\Phi}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 2041.684 & 0 \\ 0 & 4583.53 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K_{star}}_{1,1} = 2041.684 \qquad\qquad \mathbf{K_{star}}_{2,2} = 4583.53$$

Calcolo dei coefficienti di normalizzazione μ_i

$$\mu_1 := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{X_1}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X_1}}} = 0.378$$

$$\mu_2 := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{X_2}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X_2}}} = 0.489$$

Vettori modali

$$\mathbf{X_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.813 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X_2} = \begin{pmatrix} -0.488 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vettori modali normalizzati

$$\mathbf{X_1} := \mu_1 \cdot \mathbf{X_1} = \begin{pmatrix} 0.378 \\ 0.308 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X_2} := \mu_2 \cdot \mathbf{X_2} = \begin{pmatrix} -0.238 \\ 0.489 \end{pmatrix}$$

Matrice modale

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & -0.488 \\ 0.813 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice modale costruita con i vettori modali normalizzati

$$\mathbf{\Phi_{new}} := augment(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) = \begin{pmatrix} 0.378 & -0.238 \\ 0.308 & 0.489 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M_{star}} = \begin{pmatrix} 6.981 & 0 \\ 0 & 4.189 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K_{star}} = \begin{pmatrix} 2041.684 & 0 \\ 0 & 4583.53 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = 17.101 \qquad \sqrt{\frac{\mathbf{K_{star}}_{1,1}}{\mathbf{M_{star}}_{1,1}}} = 17.101$$

$$\omega_2 = 33.079 \qquad \sqrt{\frac{\mathbf{K_{star}}_{2,2}}{\mathbf{M_{star}}_{2,2}}} = 33.079$$

Quando la matrice di massa è la matrice identità, la matrice di rigidezza ha sulla diagonale le pulsazioni proprie al quadrato

$$\mathbf{\Phi_{new}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Phi_{new}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Phi}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 6.981 & 0 \\ 0 & 4.189 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi_{new}}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Phi_{new}} = \begin{pmatrix} 292.445 & 0 \\ 0 & 1094.221 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Phi}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 2041.684 & 0 \\ 0 & 4583.53 \end{pmatrix}$$

$$\left(\omega_1\right)^2 = 292.445 \qquad \left(\omega_2\right)^2 = 1094.221$$

Quando la matrice di massa M_{star} è la matrice identità, la matrice modale inversa si può calcolare come prodotto della matrice modale trasposta per la matrice di massa "originale" M, come mostrato qui sotto:

$$\mathbf{\Phi_{new}} = \begin{pmatrix} 0.378 & -0.238 \\ 0.308 & 0.489 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi_{new}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.892 & 0.923 \\ -1.191 & 1.466 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi_{new}}^T \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1.892 & 0.923 \\ -1.191 & 1.466 \end{pmatrix}$$