

Ortogonalità dei vettori modali (esempio a 2 gdl)

$$m_1 := 5 \quad m_2 := 3$$

$$k_1 := 1300 \quad k_2 := 1500 \quad k_3 := 1000$$

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} := \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2800 & -1500 \\ -1500 & 2500 \end{pmatrix}$$

Pulsazioni proprie

$$\omega := \sqrt{\text{genvals}(\mathbf{K}, \mathbf{M})} = \begin{pmatrix} 16.91 \\ 33.277 \end{pmatrix}$$

Matrice modale

$$\Phi := \text{genvecs}(\mathbf{K}, \mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 1 & -0.548 \\ 0.913 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = 16.91 \quad \mathbf{X}_1 := \Phi^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.913 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = 33.277 \quad \mathbf{X}_2 := \Phi^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} -0.548 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proprietà di ortogonalità dei vettori modali rispetto alla matrice di massa "M"

$$\mathbf{X}_1^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_2 = 0$$

$$\mathbf{X}_2^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_1 = 0$$

Proprietà di ortogonalità dei vettori modali rispetto alla matrice di rigidezza "K"

$$\mathbf{X}_1^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{X}_2 = 0$$

$$\mathbf{X}_2^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{X}_1 = 0$$

$$\mathbf{M}_{\text{star}} := \Phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} 7.503 & 0 \\ 0 & 4.502 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{star}}_{1,1} = 7.503 \quad \mathbf{M}_{\text{star}}_{2,2} = 4.502$$

$$\mathbf{K}_{\text{star}} := \Phi^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} 2145.639 & 0 \\ 0 & 4985.304 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{star}}_{1,1} = 2145.639 \quad \mathbf{K}_{\text{star}}_{2,2} = 4985.304$$

Calcolo dei coefficienti di normalizzazione μ_i

$$\mu_1 := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{X}_1^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_1}} = 0.365$$

$$\mu_2 := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{X}_2^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_2}} = 0.471$$

Vettori modali

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.913 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -0.548 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vettori modali normalizzati

$$\mathbf{X}_1 := \mu_1 \cdot \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0.365 \\ 0.333 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}_2 := \mu_2 \cdot \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -0.258 \\ 0.471 \end{pmatrix}$$

Matrice modale

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & -0.548 \\ 0.913 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice modale costruita con i vettori modali normalizzati

$$\Phi_{\text{new}} := \text{augment}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{pmatrix} 0.365 & -0.258 \\ 0.333 & 0.471 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{star}} = \begin{pmatrix} 7.503 & 0 \\ 0 & 4.502 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{star}} = \begin{pmatrix} 2145.639 & 0 \\ 0 & 4985.304 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = 16.91 \quad \sqrt{\frac{\mathbf{K}_{\text{star}}_{1,1}}{\mathbf{M}_{\text{star}}_{1,1}}} = 16.91$$

$$\omega_2 = 33.277 \quad \sqrt{\frac{\mathbf{K}_{\text{star}}_{2,2}}{\mathbf{M}_{\text{star}}_{2,2}}} = 33.277$$

Quando la matrice di massa è la matrice identità, la matrice di rigidità ha sulla diagonale le pulsazioni proprie al quadrato

$$\Phi_{\text{new}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi_{\text{new}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} 7.503 & 0 \\ 0 & 4.502 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{\text{new}}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi_{\text{new}} = \begin{pmatrix} 285.963 & 0 \\ 0 & 1107.371 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} 2145.639 & 0 \\ 0 & 4985.304 \end{pmatrix}$$

$$(\omega_1)^2 = 285.963$$

$$(\omega_2)^2 = 1107.371$$

Quando la matrice di massa \mathbf{M}_{star} è la matrice identità, la matrice modale inversa si può calcolare come prodotto della matrice modale trasposta per la matrice di massa "originale" \mathbf{M} , come mostrato qui sotto:

$$\Phi_{\text{new}} = \begin{pmatrix} 0.365 & -0.258 \\ 0.333 & 0.471 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{\text{new}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.825 & 1 \\ -1.292 & 1.414 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{\text{new}}^T \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1.825 & 1 \\ -1.292 & 1.414 \end{pmatrix}$$