

Ortogonalità dei vettori modali (esempio a 2 gdl)

$$m_1 := 5 \qquad m_2 := 4$$

$$k_1 := 1300 \qquad k_2 := 1500 \qquad k_3 := 1200$$

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} := \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2800 & -1500 \\ -1500 & 2700 \end{pmatrix}$$

Pulsazioni proprie

$$\omega := \sqrt{\text{genvals}(\mathbf{K}, \mathbf{M})} = \begin{pmatrix} 16.649 \\ 30.948 \end{pmatrix}$$

Matrice modale

$$\mathbf{\Phi} := \text{genvecs}(\mathbf{K}, \mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 1 & -0.754 \\ 0.943 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = 16.649 \qquad \mathbf{X}_1 := \mathbf{\Phi}^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.943 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = 30.948 \qquad \mathbf{X}_2 := \mathbf{\Phi}^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} -0.754 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proprietà di ortogonalità dei vettori modali rispetto alla matrice di massa "M"

$$\mathbf{X}_1^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_2 = 0$$

$$\mathbf{X}_2^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_1 = 0$$

Proprietà di ortogonalità dei vettori modali rispetto alla matrice di rigidezza "K"

$$\mathbf{X}_1^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{X}_2 = 0$$

$$\mathbf{X}_2^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{X}_1 = 0$$

$$\mathbf{M}_{\text{star}} := \Phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} 8.555 & 0 \\ 0 & 6.844 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{star}}_{1,1} = 8.555 \qquad \mathbf{M}_{\text{star}}_{2,2} = 6.844$$

$$\mathbf{K}_{\text{star}} := \Phi^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} 2371.297 & 0 \\ 0 & 6554.869 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{star}}_{1,1} = 2371.297 \qquad \mathbf{K}_{\text{star}}_{2,2} = 6554.869$$

Calcolo dei coefficienti di normalizzazione μ_i

$$\mu_1 := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{X}_1^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_1}} = 0.342$$

$$\mu_2 := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{X}_2^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_2}} = 0.382$$

Vettori modali

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.943 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -0.754 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vettori modali normalizzati

$$\mathbf{X}_1 := \mu_1 \cdot \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0.342 \\ 0.322 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}_2 := \mu_2 \cdot \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -0.288 \\ 0.382 \end{pmatrix}$$

Matrice modale

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & -0.754 \\ 0.943 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice modale costruita con i vettori modali normalizzati

$$\Phi_{\text{new}} := \text{augment}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{pmatrix} 0.342 & -0.288 \\ 0.322 & 0.382 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{star}} = \begin{pmatrix} 8.555 & 0 \\ 0 & 6.844 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{star}} = \begin{pmatrix} 2371.297 & 0 \\ 0 & 6554.869 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = 16.649 \quad \sqrt{\frac{\mathbf{K}_{\text{star}}_{1,1}}{\mathbf{M}_{\text{star}}_{1,1}}} = 16.649$$

$$\omega_2 = 30.948 \quad \sqrt{\frac{\mathbf{K}_{\text{star}}_{2,2}}{\mathbf{M}_{\text{star}}_{2,2}}} = 30.948$$

Quando la matrice di massa è la matrice identità, la matrice di rigidità ha sulla diagonale le pulsazioni proprie al quadrato

$$\Phi_{\text{new}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi_{\text{new}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} 8.555 & 0 \\ 0 & 6.844 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{\text{new}}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi_{\text{new}} = \begin{pmatrix} 277.197 & 0 \\ 0 & 957.803 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} 2371.297 & 0 \\ 0 & 6554.869 \end{pmatrix}$$

$$(\omega_1)^2 = 277.197$$

$$(\omega_2)^2 = 957.803$$

Quando la matrice di massa $\mathbf{M}_{\text{star}}$ è la matrice identità, la matrice modale inversa si può calcolare come prodotto della matrice modale trasposta per la matrice di massa "originale" $\mathbf{M}$, come mostrato qui sotto:

$$\Phi_{\text{new}} = \begin{pmatrix} 0.342 & -0.288 \\ 0.322 & 0.382 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{\text{new}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.71 & 1.289 \\ -1.441 & 1.529 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{\text{new}}^T \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1.71 & 1.289 \\ -1.441 & 1.529 \end{pmatrix}$$