Risposta al gradino (per cond. iniziali non nulle) - caso sottosmorzato

Spiegazione del metodo

Metodo n.1

$x_{omo}(t) := e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot\left(A\cdot cos\left(\omega_s\cdot t\right) + B\cdot sin\left(\omega_s\cdot t\right)\right)$ Soluzione dell' eq. omogenea

$x_{part}(t) := \delta_{st}$ Soluzione particolare dell'eq. completa

$x(t) := x_{omo}(t) + x_{part}(t)$ Soluzione generale

$x(t) \rightarrow \delta_{st} + e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot\left(A\cdot cos\left(t\cdot\omega_s\right) + B\cdot sin\left(t\cdot\omega_s\right)\right)$

$x'(t) := \frac{d}{dt}x(t)$

$x'(t) \rightarrow e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot\left(B\cdot\omega_s\cdot cos\left(t\cdot\omega_s\right) - A\cdot\omega_s\cdot sin\left(t\cdot\omega_s\right)\right) - \xi\cdot\omega\cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot\left(A\cdot cos\left(t\cdot\omega_s\right) + B\cdot sin\left(t\cdot\omega_s\right)\right)$

Calcolo delle costanti A e B

$x(0) \rightarrow A + \delta_{st}$

$x'(0) \rightarrow B\cdot\omega_s - A\cdot\xi\cdot\omega$

Given

$x(0) = x_0$

$x'(0) = v_0$

$$Find(A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 - \delta_{st} \\ \dfrac{v_0 - \xi\cdot\omega\cdot\delta_{st} + \xi\cdot\omega\cdot x_0}{\omega_s} \end{pmatrix}$$

Metodo n.2

$x_{lib}(t) := e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot\left(x_0\cdot cos\left(\omega_s\cdot t\right) + \frac{v_0 + \xi\cdot\omega\cdot x_0}{\omega_s}\cdot sin\left(\omega_s\cdot t\right)\right)$

Soluzione per vibrazioni libera, valida per:
1) assenza di forzante
2) condizioni iniziali diverse da zero

$F(t) := F_0$

$h(t) := \frac{e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}}{m\cdot\omega_s}\cdot sin\left(\omega_s\cdot t\right)$

$x_{conv}(t) := \int_0^t F(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$ $\quad x_{conv}(t) \rightarrow -\frac{F_0\cdot\left(\omega_s\cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot cos\left(t\cdot\omega_s\right) - \omega_s + \xi\cdot\omega\cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot sin\left(t\cdot\omega_s\right)\right)}{m\cdot\omega_s\cdot\left(\xi^2\cdot\omega^2 + \omega_s^{\,2}\right)}$

Soluzione data dall'integrale di convoluzione, valida per:
1) forzante presente (gradino, in questo caso)
2) condizioni iniziali nulle

$x(t) := x_{lib}(t) + x_{conv}(t)$

Spiegazione del metodo

Esempio numerico

$m := 10$ $\quad x_0 := 0.05$

$k := 10000$ $\quad v_0 := -2$

$c := 200$ $\quad F_0 := 250$

$\omega := \sqrt{\frac{k}{m}} = 31.623$ $\quad \xi := \frac{c}{2\cdot m\cdot\omega} = 31.623\cdot\%$ $\quad \omega_s := \omega\cdot\sqrt{1-\xi^2} = 30$ $\quad \delta_{st} := \frac{F_0}{k} = 0.025$

Metodo 1

$A := x_0 - \delta_{st} = 0.025$

$$B := \frac{v_0 - \xi\cdot\omega\cdot\delta_{st} + \xi\cdot\omega\cdot x_0}{\omega_s} = -0.058$$

$x_{omo}(t) := e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot\left(A\cdot cos\left(\omega_s\cdot t\right) + B\cdot sin\left(\omega_s\cdot t\right)\right)$

$x_{part}(t) := \delta_{st}$

$x_{Metodo\_1}(t) := x_{omo}(t) + x_{part}(t)$

Metodo 1

Metodo 2

$$x_{lib}(t) := e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot\left(x_0\cdot cos\left(\omega_s\cdot t\right) + \frac{v_0 + \xi\cdot\omega\cdot x_0}{\omega_s}\cdot sin\left(\omega_s\cdot t\right)\right)$$

$F(t) := F_0$

$$h(t) := \frac{e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}}{m\cdot\omega_s}\cdot sin\left(\omega_s\cdot t\right)$$

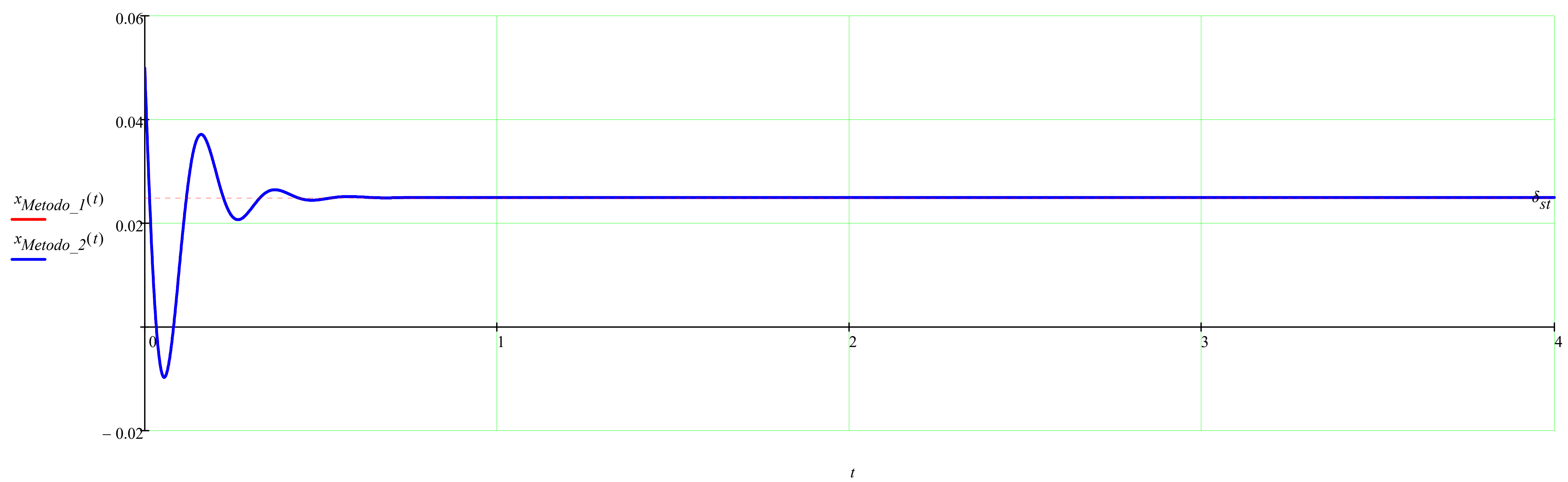
$$x_{conv}(t) := \int_0^t F(\tau)\cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

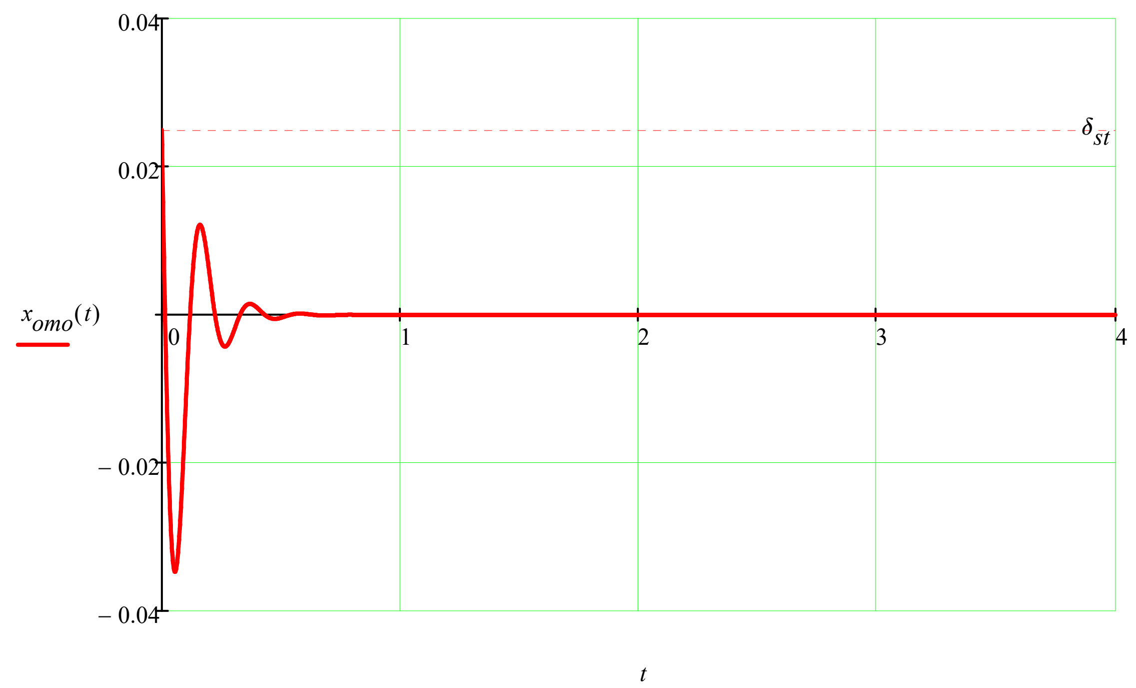
$x_{Metodo\_2}(t) := x_{lib}(t) + x_{conv}(t)$

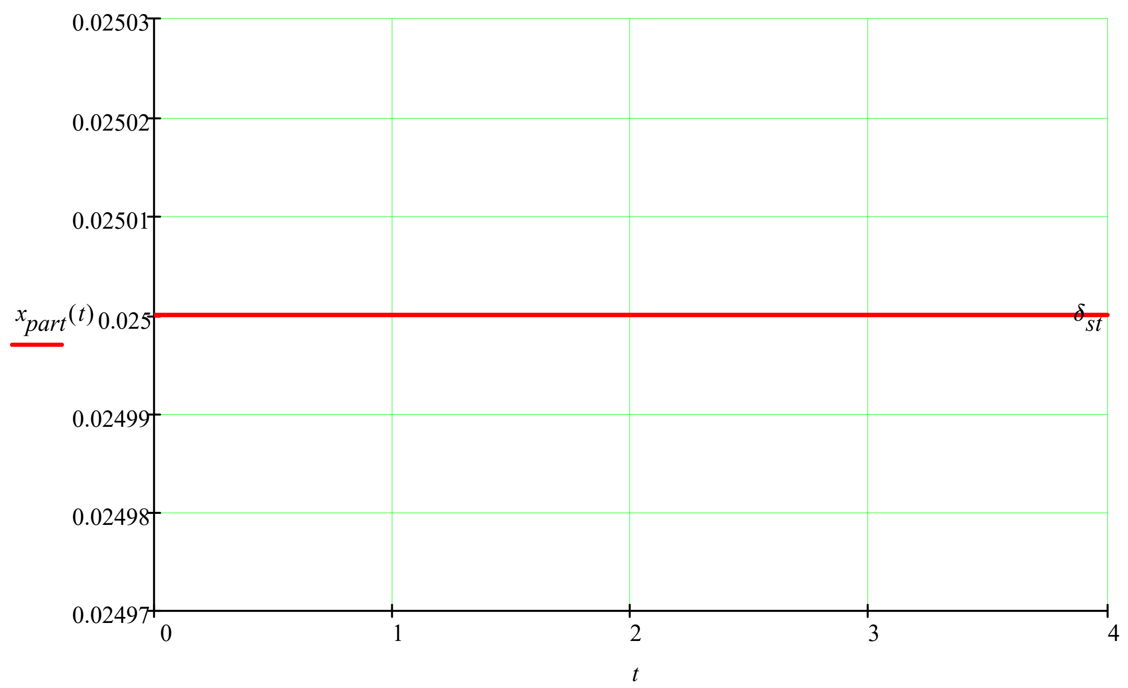
Metodo 2

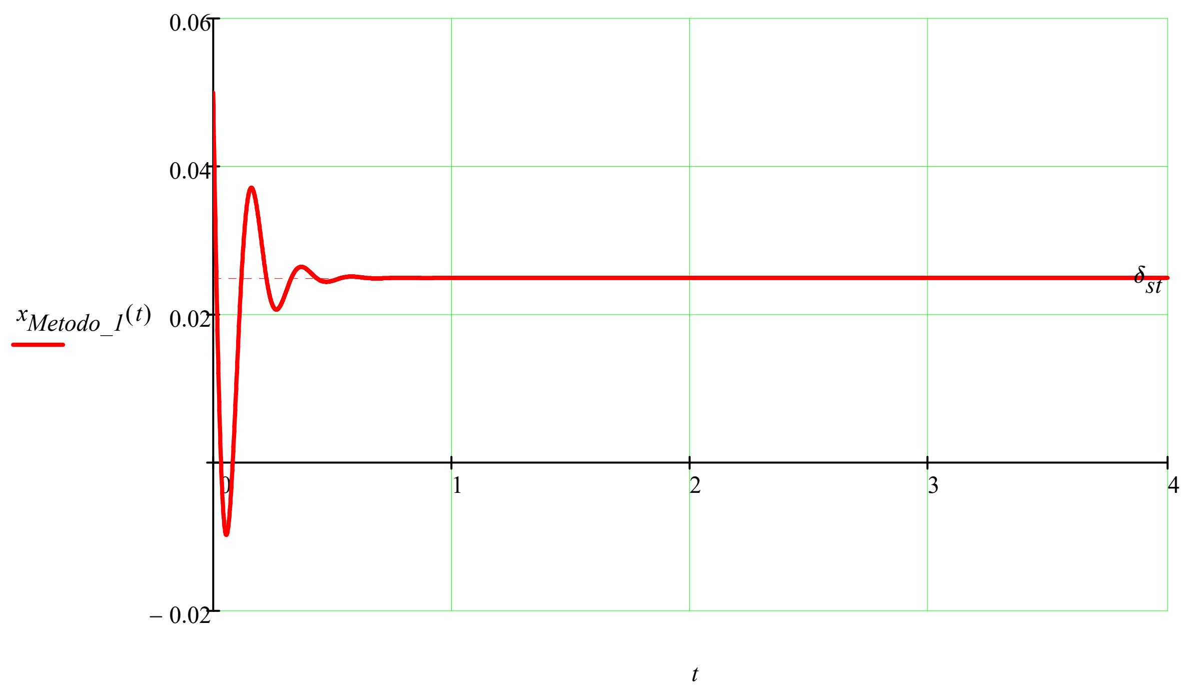
$t := 0, 0.001 .. 4$ $\quad\omega = 31.623$ $\quad T := \frac{2\cdot\pi}{\omega} = 0.199$ $\quad \frac{T}{20} = 9.935\times 10^{-3}$

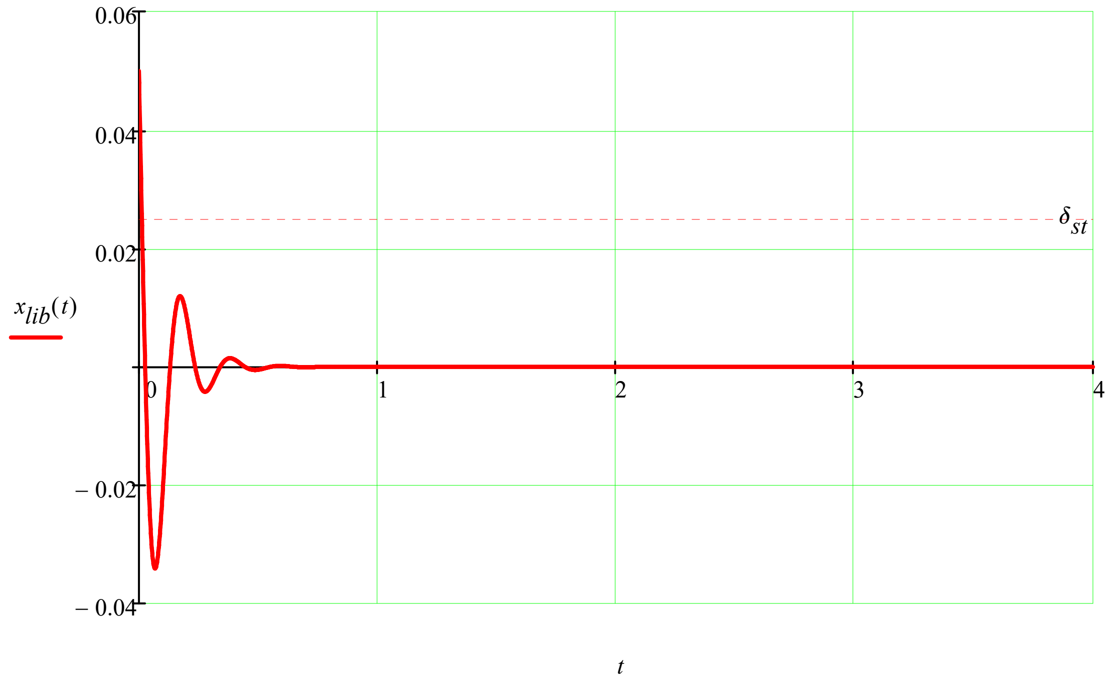
I due metodi forniscono lo stesso risultato

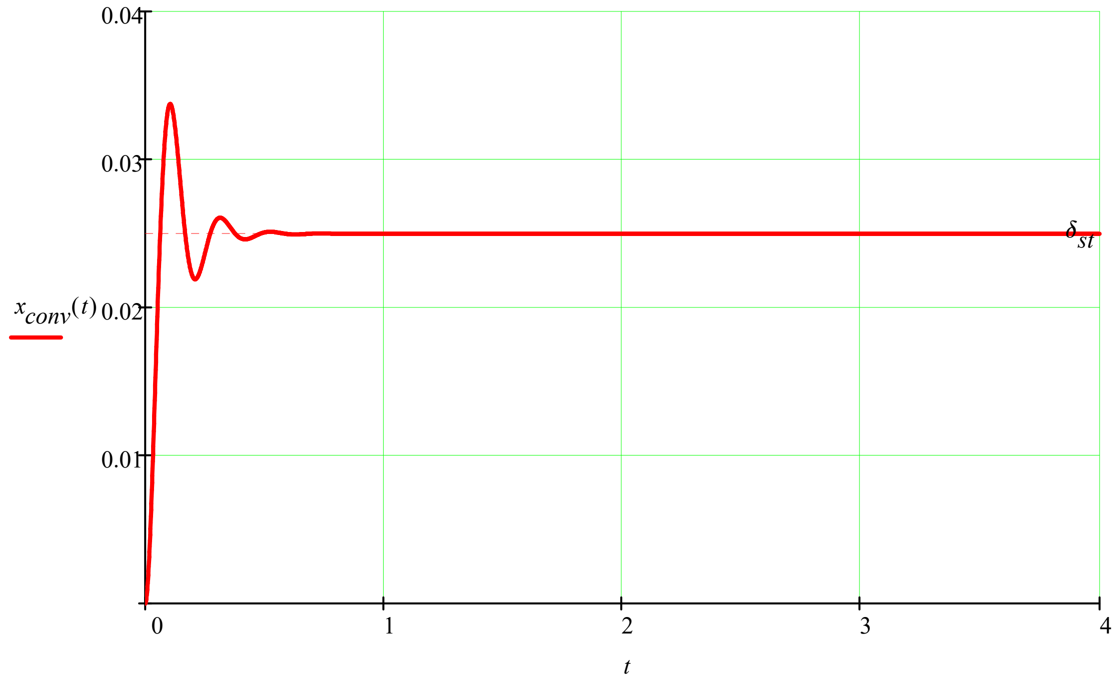


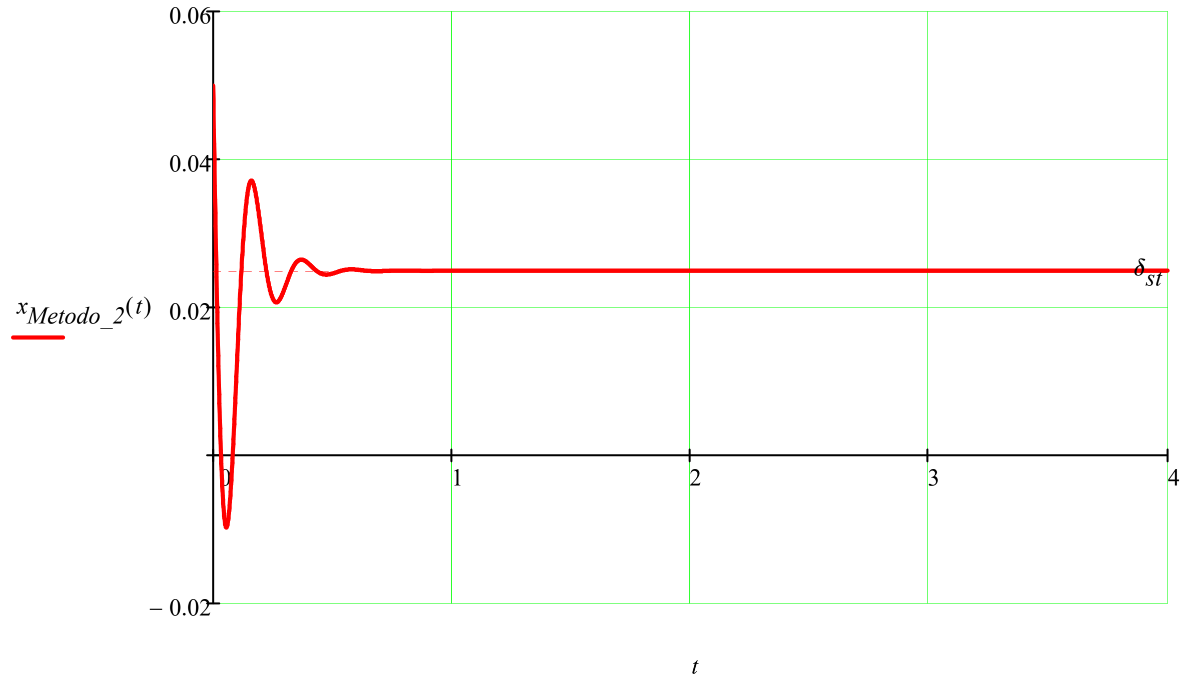












La soluzione $x_{omo}(t)$ è leggermente diversa dalla soluzione $x_{lib}(t)$; vedere grafico seguente: