Sviluppo simbolico dell'integrale di convoluzione

SCELTA = 1: caso sottosmorzato
SCELTA = 2: caso con smorzamento critico
SCELTA = 3: caso sovrasmorzato

$SCELTA := 1$

Risposta all'impulso unitario

$$h(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{-\xi \cdot \omega \cdot t}}{m \cdot \omega_s} \cdot \sin(\omega_s \cdot t) & \text{if } SCELTA = 1 \\ \dfrac{1}{m} \cdot t \cdot e^{-\omega \cdot t} & \text{if } SCELTA = 2 \\ \dfrac{1}{m \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \left(e^{\lambda_1 \cdot t} - e^{\lambda_2 \cdot t}\right) & \text{if } SCELTA = 3 \end{cases}$$

Caso con forzante a gradino (costante)

$$F(t) := F_0$$

$$F(\tau) \cdot h(t-\tau) \rightarrow -\frac{F_0 \cdot \sin\left[\omega_s \cdot (\tau - t)\right] \cdot e^{\xi \cdot \omega \cdot (\tau - t)}}{m \cdot \omega_s}$$

$$x(t) := \int_0^t F(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t) \text{ simplify } \rightarrow -\frac{F_0 \cdot \left(\omega_s \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \cos(t \cdot \omega_s) - \omega_s + \xi \cdot \omega \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \sin(t \cdot \omega_s)\right)}{m \cdot \omega_s \cdot \left(\xi^2 \cdot \omega^2 + \omega_s^2\right)}$$

Caso con forzante "rampa" (linearmente crescente nel tempo)

$$F(t) := a\cdot t$$

$$x(t) := \int_0^t F(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

$$F(\tau)\cdot h(t-\tau) \rightarrow -\frac{a\cdot\tau\cdot sin\left[\omega_s\cdot(\tau-t)\right]\cdot e^{\xi\cdot\omega\cdot(\tau-t)}}{m\cdot\omega_s}$$

$$x(t)\ simplify\ \rightarrow \frac{a\cdot\left(t\cdot{\omega_s}^3 - 2\cdot\xi\cdot\omega\cdot\omega_s - {\omega_s}^2\cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot sin\left(t\cdot\omega_s\right) + \xi^2\cdot\omega^2\cdot t\cdot\omega_s + \xi^2\cdot\omega^2\cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot sin\left(t\cdot\omega_s\right) + 2\cdot\xi\cdot\omega\cdot\omega_s\cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot cos\left(t\cdot\omega_s\right)\right)}{m\cdot\omega_s\cdot\left(\xi^2\cdot\omega^2 + {\omega_s}^2\right)^2}$$

Caso con forzante quadratica

$$F(t) := b\cdot t^2$$

$$x(t) := \int_0^t F(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

$$F(\tau)\cdot h(t-\tau) \rightarrow -\frac{\tau^2\cdot b\cdot sin\left[\omega_s\cdot(\tau-t)\right]\cdot e^{\xi\cdot\omega\cdot(\tau-t)}}{m\cdot\omega_s}$$

$$x(t)\ simplify\ \rightarrow \frac{b\cdot\left(t^2\cdot{\omega_s}^5 - 2\cdot{\omega_s}^3 + 6\cdot\xi^2\cdot\omega^2\cdot\omega_s + 2\cdot{\omega_s}^3\cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot cos\left(t\cdot\omega_s\right) + \xi^4\cdot\omega^4\cdot t^2\cdot\omega_s - 4\cdot\xi\cdot\omega\cdot t\cdot{\omega_s}^3 + 2\cdot\xi^2\cdot\omega^2\cdot t^2\cdot{\omega_s}^3 - 4\cdot\xi^3\cdot\omega^3\cdot t\cdot\omega_s - 2\cdot\xi^3\cdot\omega^3\cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot sin\left(t\cdot\omega_s\right) - 6\cdot\xi^2\cdot\omega^2\cdot\omega_s\cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot cos\left(t\cdot\omega_s\right) + 6\cdot\xi\cdot\omega\cdot{\omega_s}^2\cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot sin\left(t\cdot\omega_s\right)\right)}{m\cdot\omega_s\cdot\left(\xi^2\cdot\omega^2 + {\omega_s}^2\right)^3}$$