Sviluppo simbolico dell'integrale di convoluzione

SCELTA = 1: caso sottosmorzato
SCELTA = 2: caso con smorzamento critico
SCELTA = 3: caso sovrasmorzato

$SCELTA := 1$

Risposta all'impulso unitario

$$h(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}}{m\cdot\omega_s}\cdot sin\left(\omega_s\cdot t\right) & \text{if } SCELTA = 1 \\ \dfrac{1}{m}\cdot t\cdot e^{-\omega\cdot t} & \text{if } SCELTA = 2 \\ \dfrac{1}{m\cdot\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)}\cdot\left(e^{\lambda_1\cdot t} - e^{\lambda_2\cdot t}\right) & \text{if } SCELTA = 3 \end{cases}$$

Caso con forzante a gradino (costante)

$$F(t) := F_0$$

$$F(\tau)\cdot h(t-\tau) \rightarrow -\frac{F_0\cdot sin\left[\omega_s\cdot(\tau - t)\right]\cdot e^{\xi\cdot\omega\cdot(\tau - t)}}{m\cdot\omega_s}$$

$$x(t) := \int_0^t F(\tau)\cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t)\ simplify \ \rightarrow -\frac{F_0\cdot\left(\omega_s\cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot cos\left(t\cdot\omega_s\right) - \omega_s + \xi\cdot\omega\cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}\cdot sin\left(t\cdot\omega_s\right)\right)}{m\cdot\omega_s\cdot\left(\xi^2\cdot\omega^2 + \omega_s^{\,2}\right)}$$

Caso con forzante "rampa" (linearmente crescente nel tempo)

$$F(t) := a \cdot t$$

$$x(t) := \int_0^t F(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

$$F(\tau) \cdot h(t-\tau) \rightarrow -\frac{a \cdot \tau \cdot \sin\left[\omega_s \cdot (\tau - t)\right] \cdot e^{\xi \cdot \omega \cdot (\tau - t)}}{m \cdot \omega_s}$$

$$x(t)\ simplify\ \rightarrow \frac{a \cdot \left(t \cdot \omega_s^{\ 3} - 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_s - \omega_s^{\ 2} \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \sin\left(t \cdot \omega_s\right) + \xi^2 \cdot \omega^2 \cdot t \cdot \omega_s + \xi^2 \cdot \omega^2 \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \sin\left(t \cdot \omega_s\right) + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_s \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \cos\left(t \cdot \omega_s\right)\right)}{m \cdot \omega_s \cdot \left(\xi^2 \cdot \omega^2 + \omega_s^{\ 2}\right)^2}$$

Caso con forzante quadratica

$$F(t) := b \cdot t^2$$

$$x(t) := \int_0^t F(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

$$F(\tau) \cdot h(t-\tau) \rightarrow -\frac{\tau^2 \cdot b \cdot \sin\left[\omega_s \cdot (\tau - t)\right] \cdot e^{\xi \cdot \omega \cdot (\tau - t)}}{m \cdot \omega_s}$$

$$x(t)\ simplify\ \rightarrow \frac{b \cdot \left(t^2 \cdot \omega_s^{\ 5} - 2 \cdot \omega_s^{\ 3} + 6 \cdot \xi^2 \cdot \omega^2 \cdot \omega_s + 2 \cdot \omega_s^{\ 3} \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \cos\left(t \cdot \omega_s\right) + \xi^4 \cdot \omega^4 \cdot t^2 \cdot \omega_s - 4 \cdot \xi \cdot \omega \cdot t \cdot \omega_s^{\ 3} + 2 \cdot \xi^2 \cdot \omega^2 \cdot t^2 \cdot \omega_s^{\ 3} - 4 \cdot \xi^3 \cdot \omega^3 \cdot t \cdot \omega_s - 2 \cdot \xi^3 \cdot \omega^3 \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \sin\left(t \cdot \omega_s\right) - 6 \cdot \xi^2 \cdot \omega^2 \cdot \omega_s \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \cos\left(t \cdot \omega_s\right) + 6 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_s^{\ 2} \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \sin\left(t \cdot \omega_s\right)\right)}{m \cdot \omega_s \cdot \left(\xi^2 \cdot \omega^2 + \omega_s^{\ 2}\right)^3}$$